Normalverteilung

Beispiel 5 Es seien $X_1, X_2, \ldots, X_{400}$ unabhängige, normalverteilte Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}(X_i) = 1{,}7$ und $\operatorname{Var}(X_i) = 0{,}25$ für $i = 1, \ldots, 400$. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse:

a) $\left\{\sum_{i=1}^{400} X_i \leqslant 687\right\}$ b) $\left\{671 < \sum_{i=1}^{400} X_i\right\}$ c) $\left\{671 < \sum_{i=1}^{400} \leqslant 687\right\}$

Zeichnen Sie die Glockenkurve und markieren Sie die untersuchte Fläche.

> **Hinweis.** Benutzen Sie `Calc` → `Verteilung` unter Statistik .

Beispiel 6 In einer Altersgruppe gesunder Personen wird der systolische Blutdruck (in „mm Hg“, Millimeter einer Quecksilbersäule) gemessen. Das Ergebnis lässt sich als normal verteilte Zufallsvariable X mit Erwartungswert $\mathbb{E}(X) = \mu = 125$ und einer Varianz von $\sigma^2 = 225$ betrachten.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einer zufällig ausgewählten Person ein systolischer Blutdruck von mehr als 140 beobachtet wird.

> **Hinweis.** Benutzen Sie hierfür
> `Calc` → `Verteilung` → `Verteilung` → `Normal-V summiert`
> unter Statistik .

b) Bestimmen Sie einen Wert $x_{0{,}99}$, so dass der systolische Blutdruck mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,99 unter $x_{0{,}99}$ liegt.

> **Hinweis.** Benutzen Sie hierfür
> `Calc` → `Verteilung` → `inv. Verteilung` → `Inverse Normal-V`
> unter Statistik mit `Lage Wkt.` *Links*.

c) Notieren Sie ein Intervall I des Blutdrucks, das den Mittelwert 125 hat und in dem ein Blutdruck-Messwert mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,8 liegt.

> **Hinweis.** Benutzen Sie hierfür
> `Calc` → `Verteilung` → `inv. Verteilung` → `Inverse Normal-V`
> unter Statistik mit `Lage Wkt.` *Mittelpunkt*.

Beispiel 7 Stellen Sie $B(k; 25; \frac{1}{2})$ graphisch dar. Betrachten Sie die *Glockenfunktion* $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Zeichnen Sie die Glockenkurve jeweils nach den unten notierten Operationen mit dem Graphen zu $B(k; 25; \frac{1}{2})$ in ein Koordinatensystem und folgern Sie daraus einen Zusammenhang zwischen der Normal- und der Binomialverteilung.

$$\varphi(x) \to \varphi(x-\mu) \to \frac{1}{\sigma} \cdot \varphi(x-\mu) \to \frac{1}{\sigma} \cdot \varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

Lösung von Beispiel 5 Bei Statistik findet man unter

`Calc` → `Verteilung`

Möglichkeiten, Verteilungen zu wählen und mit ihnen zu arbeiten. Die Bezeichnungen in Verbindung mit der Normalverteilung bedeuten:

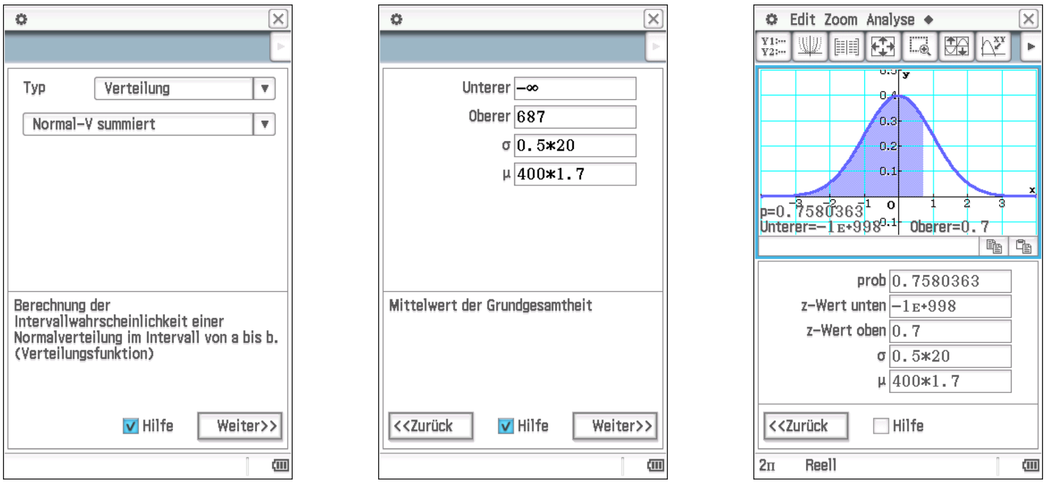

Abbildung 1: $N(\mu, \sigma^2)$ ohne Φ-Umgebung

Typ:	`Verteilung`	
`Normal-V einzeln`:	$N(\mu, \sigma^2)$	für $]-\infty; x]$, also $\frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
`Nomal-V summiert`:	$N(\mu, \sigma^2)$	für Variablen a, b und $P(a \leqslant X \leqslant b)$.

Wir wählen `Normal-V summiert`, vgl. Abbildung 1, links. Wir berechnen die Wahrscheinlichkeiten $P(X \leqslant b)$. Hierbei sind einige Punkte zu berücksichtigen: $a = -\infty$ und $b = 687$.

Da es sich um 400 gleichverteilte Zufallsvariablen handelt, gilt $X = \sum_{i=1}^{400} X_i = 400 \cdot X_1$. Also ist $\mu = 400 \cdot \mathbb{E}(X_1) = 400 \cdot 1{,}7$.

Die Varianz $\operatorname{Var}(X)$ ist gleich $\sigma^2 = 400 \cdot \operatorname{Var}(X_1)$.

$\Rightarrow \sigma = \sqrt{400 \cdot 0{,}25} = 20 \cdot 0{,}5$.

Gibt man diese Werte ein, so erhält man die Ergebnisse von Abbildung 1.

Die obere Grenze bzgl. der $N(0, 1)$ ist gleich 0,7. Falls man die Umrechnung auf die Integralfunktion Φ durchführt, erhält man die in Abbildung 2 gezeigten Ergebnisse.

Die Ergebnisse stimmen selbstverständlich überein.

Lösung von Beispiel 6. a) Die Wahrscheinlichkeit ist gleich $P(X > 140)$ und berechnet sich mit

$$P(X > 140) = 1 - P(X \leqslant 140).$$

Die Werte für die Berechnung von $P(X \leqslant 140)$ sind in Abbildung 3 zu erkennen.

Dieser Wert ist von 1 zu subtrahieren und ergibt $P(X > 140) = 1 - 0{,}8413447 = 0{,}1586553$.

b) Wir öffnen die Oberfläche `Calc` → `Verteilung` → `Inverse Verteilung` und wählen `Typ:` Verteilung sowie `Inverse Normal-V` und setzen hier

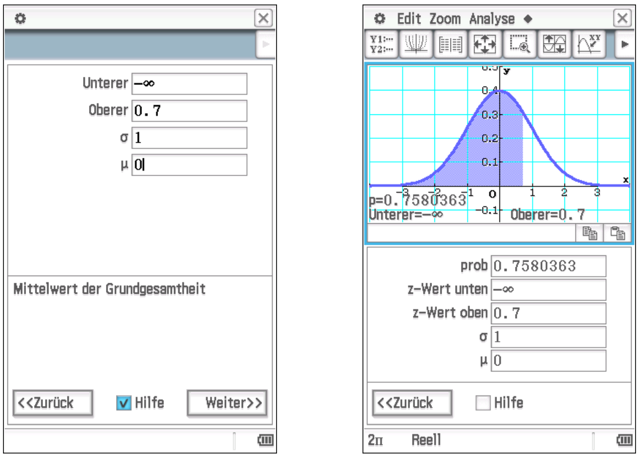

Abbildung 2: $N(\mu, \sigma^2)$ mit Φ-Umgebung

`Lage Wkt.`	Links
`prob:`	0.99
σ	15
μ	125

Die Wahl der Parameter bedeutet hierbei, dass für die Dichtefunktion φ die Grenze b des Integrals $\int\limits_{-\infty}^{b} \varphi(x)\, dx$ berechnet werden. Der Wert b wird wie in der Mitte von Abbildung 4, links, sichtbar ausgegeben. Das bedeutet, dass das Intervall gleich $]-\infty; 159{,}89521]$ ist, was sich graphisch darstellen lässt.

c) Wir öffnen die Oberfläche `Quantile Normalverteilung` und ersetzen die folgenden Einstellungen im Vergleich zu Teil b):

`Lage Wkt.`	Mittelpunkt
`Fläche:`	0.8

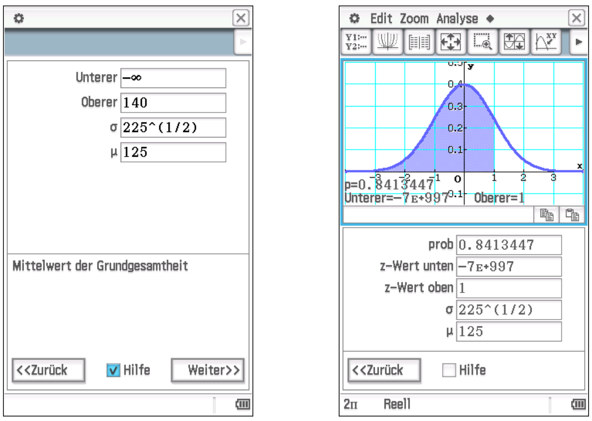

Abbildung 3: Berechnung von $P(X \leqslant 140)$

Hier werden für die Dichtefunktion φ die Grenzen a und b von $\int\limits_{a}^{b} \varphi(x)\, dx$ mit $\mu = \frac{a+b}{2}$ berechnet. Die Werte a und b werden wie in Abbildung 4, rechts, ausgegeben; es bedeutet $I = [105.77673; 144{,}22327]$.

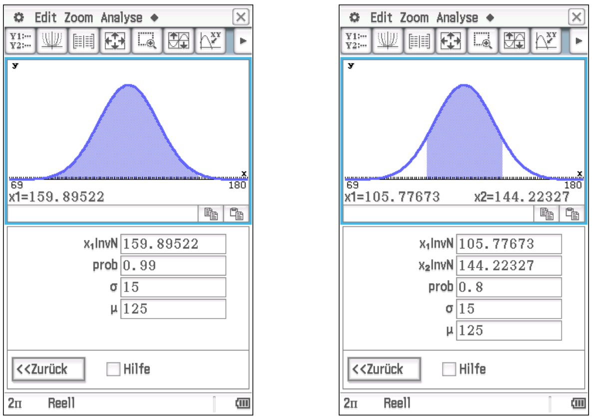

Abbildung 4: Berechnung einer Intervallgrenze und beidseitiger Intervallgrenzen

Lösung von Beispiel 7. Wir berechnen $\mu = n \cdot p = 12{,}5$ und $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = 6{,}25$.

Die Beobachtung der Zeichnungen läuft darauf hinaus, die Verschiebung eines Graphen der Gaußfunktion auf einen Graphen der Binomialverteilung anschaulich zu machen. Dazu werden die folgenden Schritte durchgeführt:

1) $\varphi(x) \to \varphi(x-\mu)$ Verschiebung der Gaußglocke um μ nach rechts
2) $\varphi(x-\mu) \to \frac{1}{\sigma} \cdot \varphi(x-\mu)$ Stauchen der Glocke um den Faktor $\frac{1}{\sigma}$.
3) $\frac{1}{\sigma} \cdot \varphi(x-\mu) \to \frac{1}{\sigma} \cdot \varphi(\frac{x-\mu}{\sigma})$ Strecken der x-Richtung um den Faktor σ.

Wir definieren eine Funktion zur Berechnung der Wahrscheinlichkeiten in der Binomialverteilung: `Define pBin(x)=binomialPDf(x,25,0.5)`

Hiermit definieren wir unter Tabellenkalkulation eine Tabelle mit den Werten für $x = 0, \ldots, 25$ und exportieren die Tabelle über `Datei` → `Export` nach Statistik in die Spalten der Zähler `zaehler` und der Werte `wkt` der Funktion `pBin` (vgl. Abbildung 5, links).

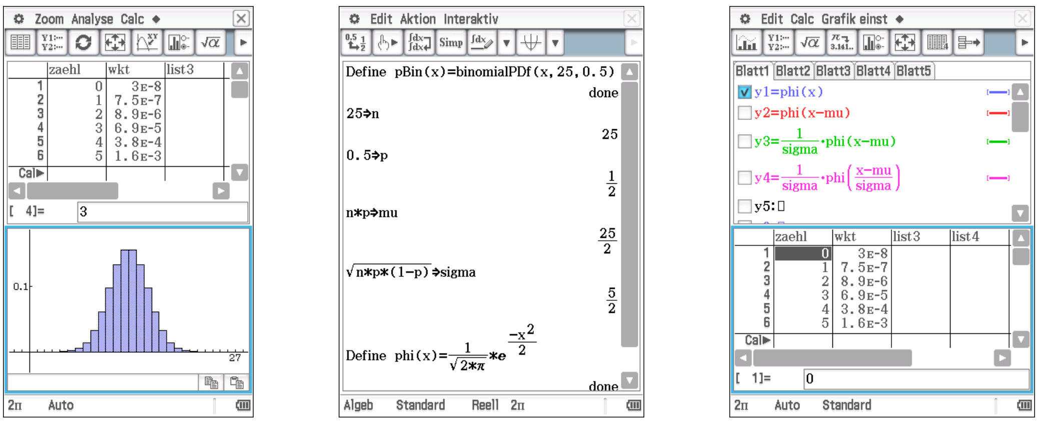

Abbildung 5: Binomialverteilung und φ-Funktion für Graphen

Für diesen Datensatz machen wir wie üblich ein Histogramm, wie es in Abbildung 5, links, zu sehen ist. Beachten Sie bei der Eingabe der Grenze und der Breite, dass die linke Grenze des Blocks das Maß an der x-Achse ist. Daher sind die folgenden Einstellungen für das Histogramm zu wählen:

`H-Start:` -0.5

`H-Schr.:` 1

Zum Einbau der Graphen der Normalverteilung in diese Abbildung definieren wir die entsprechenden Funktionen. Vorher legen wir noch die Parameter μ und σ fest und definieren die Funktion φ, wie es in der Mitte von Abbildung 5 zu sehen ist.

Die Funktionen werden wie oben beschrieben definiert, vgl. die Funktionen `y1` bis `y4` in Abbildung 5. Die Abbildungen 6 und 7 zeigen der Reihe nach die Graphen der Funktion φ und den Funktionen aus den beschriebenen Schritten 1 bis 3.

Hiermit gilt $\frac{1}{\sigma} \cdot \varphi(x-\mu) \to \frac{1}{\sigma} \cdot \varphi(\frac{x-\mu}{\sigma}) \approx B(k;n;p)$. Bei diesem kleinen Umfang zeigt sich, dass Differenzen zwischen den Werten der Funktion φ und der Binomialverteilung auftreten. Diese Differenzen gehen mit wachsendem Umfang n gegen 0, wie es der Satz von Moivre und Laplace aussagt.

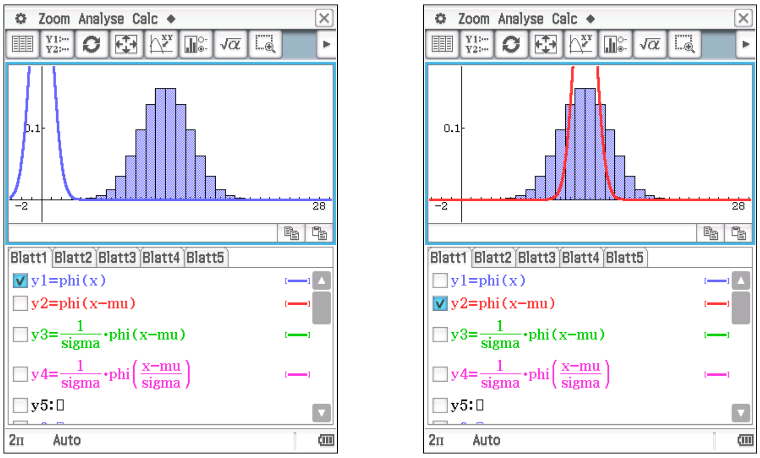

Abbildung 6: Graphen der Funktion φ mit $\varphi(x)$, $\varphi(x-\mu)$ und $B(k;25;\frac{1}{2})$

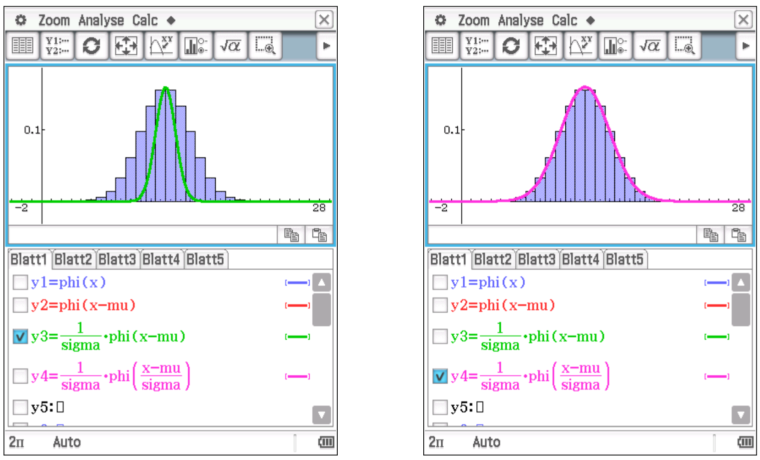

Abbildung 7: Graphen der Funktion mit $\frac{1}{\sigma}\varphi(x-\mu)$, $\frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ und $B(k;25;\frac{1}{2})$