CASIO forum
Schul- und Grafikrechner • Ausgabe 1/2025

Inhalt

Editorial

Liebe Lehrerinnen, liebe Lehrer,

vor Ihnen liegt die Ausgabe 2025 des CASIO forum. Uns haben wieder viele Beiträge zu den verschiedensten Themen des Mathematikunterrichts erreicht.

Einer befasst sich mit den vielen Zufällen, die dafür verantwortlich sind, ob es lange dauert, in ein Flugzeug einzusteigen.
Wie ein WTR beim Unterricht zur Differenzialrechnung beitragen kann, zeigt ein weiterer Beitrag.
Ein Artikel stellt ein Beispiel dar, sich vom WTR über QR-Code in die Mathematik-Software ClassPad.net weiterleiten zu lassen. Diese stellt viele mathematische Werkzeuge zusätzlich zu den eingeschränkten Möglichkeiten des Rechners zur Verfügung. Auch der WTR selbst wird vorgestellt. Orthogonale lineare Regression kann im Unterricht thematisiert werden, wenn der ClassPad benutzt wird. Wie das geht, zeigt ein Beispiel. Die Bierdeckelaufgabe kann ebenfalls als Rätselaufgabe verwendet werden, wenn die erste Spalte als Frage und die weiteren als Antwort verwendet werden. Ein weiteres Thema in dieser Ausgabe ist die Berechnung von Vertrauensintervallen mit dem WTR. Das Sierpinski-Dreieck ist ein bedeutendes mathematisches Objekt, mit dem sich der letzte Artikel beschäftigt.
Einen Überblick über Support-Angebote finden Sie auf der Casio-Internetseite.

Über Rückmeldungen, Anregungen oder eigene Beiträge zur nächsten Ausgabe freuen wir uns immer. Gerne auch als Mail an education@casio.de

Ihr Redaktionsteam

Aufgabenbeispiel

Ein Wartezeitproblem: Einsteigen in ein Flugzeug

Autor: Dr. Jens Weitendorf, Universität Hamburg

Beim Einsteigen in ein Flugzeug ergeben sich Wartezeiten, da Passagiere der vorderen Plätze andere blockieren, die weiter hinten sitzen, da in der Regel noch Handgepäck zu verstauen ist. Wir nehmen an, dass ein Passagier 1 Minute benötigt, um sein Handgepäck zu verstauen. Optimal wäre es, wenn die Passagiere der hinteren Plätze zuerst und die der vorderen zuletzt einsteigen würden, was aber selten der Fall ist. Dieses soll im Folgenden genauer untersucht werden. Wir machen dazu vereinfachte Annahmen: Das Flugzeug habe 20 Sitzplätze, die in einer Reihe angeordnet sind. Des Weiteren sind die Schlangen hinreichend lang, sodass jeweils alle Plätze blockiert sind. Ansonsten wäre es möglich, wenn der 6. mit der Platzkarte 19 einsteigt, auch z. B. die Fahrgäste mit den Platzkarten 9 und 7 Platz nehmen können.

Fortsetzung auf Seite 2

Um den Vorgang zu simulieren, generieren wir mithilfe eines Programms eine zufällige Anordnung der Zahlen von 1 … 20.

```
reihe    N
randlist(20)⇒list1
for 1⇒j to 20
1⇒m
for 1⇒k to 20
if list1[j] > list1[k]
then
m+1⇒m
ifend
next
m⇒list2[j]
next
print list2
0⇒m
```

Wir klären die Verhältnisse zunächst an einem Beispiel einer Zahlenreihe, die mit dem obigen Programm erzeugt wurde:

{1, 4, 2, 8, 3, 19, 14, 20, 9, 7, 12, 5, 15, 6, 13, 16, 17, 18, 11, 10}

- 1 steigt ein: 1 min
- 4 und 2 können gemeinsam einsteigen, da 4 die 2 nicht blockiert: 1 min
- 8 und 3: 1 min
- 19 und 14: 1 min
- 20, 9 und 7: 1 min
- 12 und 5: 1 min
- 15 und 6: 1 min
- 13: 1 min, 16: 1 min, 17: 1 min
- 18, 11 und 10: 1 min

Für das obige Beispiel erhalten wir eine Gesamtdauer von 11 Minuten. Die Auswertung lässt sich auch mit der Tabellenkalkulation bewältigen:

	A	B	C	D	E
1	1	1			
2	4	0		11	
3	2	1			
4	8	0			
5	3	1			
6	19	0			
7	14	1			
8	20	0			
9	9	0			
10	7	1			
11	12	0			
12	5	1			
13	15	0			
14	6	1			
15	13	1			
16	16	1			
17	17	1			
18	18	0			
19	11	0			
20	10	0			

=piecewise(A1<A2,1,0)

Gezählt wurde dabei immer, wenn eine größere auf eine kleinere Platznummer folgt, da die kleinere die größere blockiert.
Interessant wäre es, die durchschnittliche Wartezeit zu bestimmen. Dazu müssen alle Möglichkeiten betrachtet werden. Da dies für 20 nicht wirklich machbar ist, beschränken wir uns im Folgenden auf 4.

Anordnung	WZ	Anordnung	WZ	Anordnung	WZ	Anordnung	WZ
1 2 3 4	4	2 1 3 4	3	3 1 2 4	3	4 1 2 3	3
1 2 4 3	3	2 1 4 3	2	3 1 4 2	2	4 1 3 2	2
1 3 2 4	3	2 3 1 4	3	3 2 1 4	2	4 2 1 3	2
1 3 4 2	3	2 3 4 1	3	3 2 4 1	2	4 2 3 1	2
1 4 2 3	3	2 4 1 3	3	3 4 1 2	3	4 3 1 2	2
1 4 3 2	2	2 4 3 1	2	3 4 2 1	2	4 3 2 1	1

Für den Erwartungswert erhält man:

$$E = \frac{4}{24} + 11 \cdot \frac{3}{24} + 11 \cdot \frac{2}{24} + \frac{1}{24} = \frac{60}{24} = 2{,}5$$

Es gilt allgemein für eine Reihe der Länge n: $E = \frac{n+1}{2}$.
Wir lassen jetzt die Annahme fallen, dass alle anderen Plätze blockiert sind. Wir nehmen jetzt an, dass die Fluggäste hinreichend schlank sind, sodass es möglich ist, dass z. B. die Gäste mit den Platznummern 13, 12, 11 usw. gleichzeitig ihren Platz einnehmen können.

Wir diskutieren jetzt noch mal das Beispiel oben unter der neuen Annahme:

{1, 4, 2, 8, 3, 19, 14, 20, 9, 7, 12, 5, 15, 6, 13, 16, 17, 18, 11, 10}

- 1 steigt ein: 1 min
- 4 und 2 können gemeinsam einsteigen, da 4 die 2 nicht blockiert: 1 min
- 8 und 3: 1 min
- 19, 14, 9, 7 und 5: 1 min
- 20, 12 und 6: 1 min
- 15, 13, 10 und 11: 1 min
- 16: 1 min, 17: 1 min, 18: 1 min

Für das obige Beispiel erhalten wir jetzt eine Gesamtdauer von 9 Minuten.

Wenn man sich länger mit dem Problem beschäftigt, ergibt sich die Vermutung, dass für die Dauer aufsteigende Teilfolgen bedeutsam sind. Wir beziehen uns wieder auf die obige Folge:

Beispiele für aufsteigende Teilfolgen wären:
1, 4, 8, 19, 20
1, 2, 3, 9, 12, 13, 16, 17, 18
oder 1, 2, 3, 5, 6, 13, 16, 17, 18
Die beiden letzten Teilfolgen haben die Länge 9. Es gibt keine längere Teilfolge. Es ergibt sich die Vermutung, dass die Wartezeit t der Länge der längsten Teilfolge entspricht.
Beweisen lässt sich die Vermutung durch vollständige Induktion.
Es gilt für n=3; der Beweis ergibt sich aus der folgenden Tabelle.

Folge	Wartezeit	Teilfolge	Länge
1 2 3	3	1 2 3	3
1 3 2	2	1 3	2
2 1 3	2	1 3	2
2 3 1	2	2 3	2
3 1 2	2	1 2	2
3 2 1	1	1	1

Wir nehmen nun an, dass für eine Teilfolge der Länge k die Wartezeit k Minuten dauert, und zeigen, dass dann die Wartezeit für eine Teilfolge der Länge k+1 die Wartezeit sich um 1 Minute verlängert.

Die Teilfolge sei gegeben durch $W=[a\_{i1},a\_{i2},\dots,a\_{ik}]$. Nun kommt ein weiteres Element a_{im} hinzu. Wir unterscheiden 3 Fälle:
1) $a_{im}<a_{i1}$: Die Wartezeit erhöht sich um 1, da alle $a_{in} \in W$ durch a_{im} blockiert werden.
2) $a_{it}<a_{im}<a_{it+1}$: Die Wartezeit erhöht sich um 1, da alle a_{in} ab a_{it+1} blockiert werden.
3) $a_{ik}<a_{im}$: Das Element a_{im} erhöht die Wartezeit um 1.

Wir beweisen jetzt die Umkehrung, dass es für die Wartezeit eine Teilfolge entsprechender Länge gibt. Der Beweis erfolgt wieder durch vollständige Induktion:
Der Induktionsanfang ergibt sich für Folgen der Länge drei aus der Tabelle oben.
Annahme: Es gilt für n = K
Die Passagiere … P_{t-1} … P_t… seien blockiert.
Es gibt eine aufsteigende Teilfolge $a_1 \dots a_{t-1} \dots a_t \dots a_k$
k –> k+1: Es gibt einen weiteren blockierten Passagier P_x

1) $a_x<a_1$ oder $a_k<a_x$ => aufsteigende Teilfolge der Länge k+1

2) $a_{t-1}<a_x<a_t$ für ein beliebiges t, so wird zwar der Fluggast P_t blockiert, aber die Gäste $P_{t-1}\ und\ P_x$ können zusammen Platz nehmen, was bedeutet, dass die Wartezeit nicht zunimmt; das heißt, dieser Fall kann nicht eintreten.

Um eine durchschnittliche Wartezeit für die neue Annahme anzugeben, benötigte man auch hierfür den Erwartungswert. In der Literatur findet man dazu:

$$E(n) = \frac{1}{n!} \sum_{alle\ Folgen} is(w) > \frac{1}{n!} \bullet \frac{n!}{2} \bullet \sqrt{n} = \frac{\sqrt{n}}{2}$$

Dabei sei:
$is(w) = max\{k \mid 1 \le k \le n,\ sodass\ w\ eine\ aufsteigende\ Teilfolge\ der\ Länge\ k\ hat\}$

Der Beweis erfolgt mithilfe des Satzes von Erdős und Szekeres 1935).
Genaueres findet man in Anne Henke: Mathematisches Potpourri rund um das Einsteigen ins Flugzeug in Hager, C. und Wohlmuth, B. in Wendland, K. und Werner, A. (2011): Facettenreiche Mathematik, Vieweg + Teubner Verlag Springer Fachmedien Wiesbaden

Aufgabenbeispiel

Numerische Ermittlung der ersten Ableitung einer Funktion an einer bestimmten Stelle mit dem CASIO fx-810DE CW

Autor: Dr. Wolfgang Ludwicki, Tangermünde

In der Schulmathematik wird die **1. Ableitung einer Funktion** f an einer Stelle $x=x_0$ als Grenzwert des Differenzenquotienten für $h \to 0$ definiert.

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad .$$

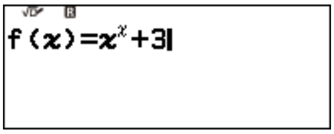
Für die numerische Bestimmung des Differentialquotienten ist es günstig, den symmetrischen Differenzenquotienten zu verwenden.

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} \quad .$$

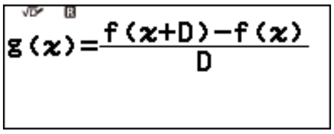
Soll zum Beispiel die erste Ableitung der Funktion

$$f(x) = x^x + 3$$

an der Stelle $x=1{,}3$ berechnet werden, so wird zunächst die Funktion f definiert

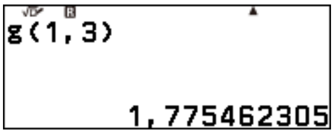


Der Differenzenquotient wird als Funktion g definiert



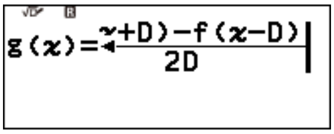
Der Variable D wird ein kleiner Wert zugewiesen

Mittels $g(1{,}3)$ wird nun ein Näherungswert für $f'(1{,}3)$ aufgerufen

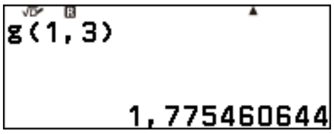


Mit dem CAS des ClassPad findet man $f'(1{,}3) \approx 1{,}775460644$.

Wird der symmetrische Differenzenquotient

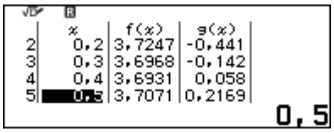


verwandt, so ergibt sich

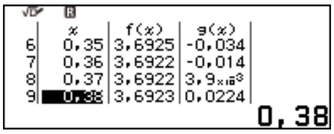


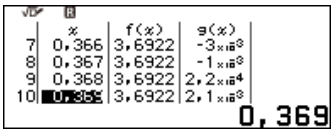
also ein genauerer Wert.

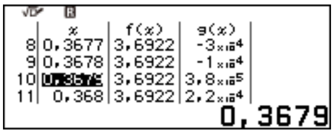
Die Werte der ersten Ableitung können natürlich auch in einer Tabelle dargestellt werden.



Diese Tabelle zeigt, dass die Funktion $f(x)=x^x+3$ zwischen 0,3 und 0,4 ein relatives Minimum hat. Durch fortgesetzte Zehnteilung







findet man, dass die Minimumstelle zwischen 0,3678 und 0,3679 liegt.

Software-Tipp

ClassWiz Emulator nutzen

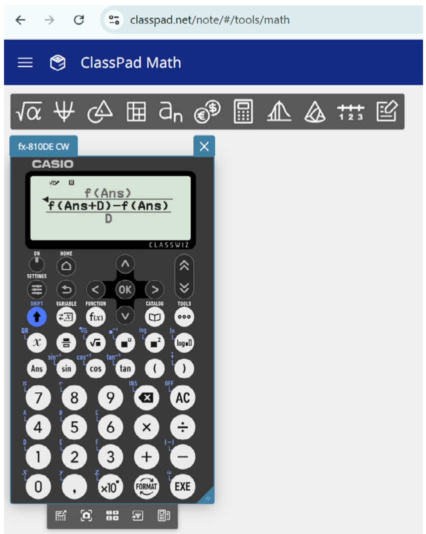
Der ClassWiz Emulator ist ein wertvolles Hilfsmittel für die Unterrichtsvorbereitung, das Erstellen von Anleitungen und von Arbeitsblättern sowie für die Präsentation im Klassenzimmer.

Die Software ist unabhängig vom Betriebssystem und läuft in allen gängigen Browsern. Sie enthält die identische Grundfunktionalität wie die Modelle der ClassWiz-Serie. Das Erstellen von Screenshots ist problemlos möglich. Es gibt auch die Möglichkeit, die Tastenfolge zu protokollieren. Für Funktionsgrafen gibt es die Möglichkeit eines Pop-up-Displays das sogar skalierbar ist.

So einfach geht's:
Der Emulator für die ClassWiz-Serie ist über ClassPad.net verfügbar. Registrieren Sie sich als Lehrkraft auf:

www.casio-education.eu

Nach der Accounterstellung loggen Sie sich ein und können Classpad.net (Mathematik-Software mit Emulator) kostenfrei nutzen. In der linken Navigation auf www.casio-education.eu rufen Sie dazu bitte ClassPad.net auf und öffnen das Tool „ClassPad Math“. Nun klicken Sie einfach in den grauen Bereich und rufen den entsprechenden ClassWiz Emulator auf.
Der Emulator für die fx-DE X- sowie fx-DE CW-Serie lässt sich so auf allen Endgeräten nutzen.



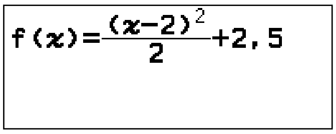
Aufgabenbeispiel

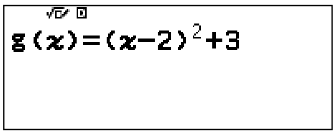
Graphen mit dem wissenschaftlichen Taschenrechner und ClassPad.net

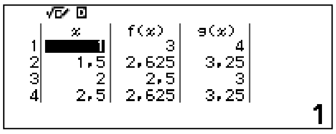
Autoren: Casio Educational Team

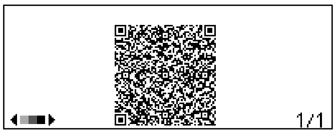
Aufgabe: Entwerfen Sie ein einfaches Schnittbild einer Kerze mit dem ClassWiz und ClassPad.net

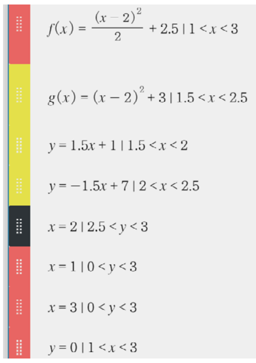
Um im Koordinatensystem zu zeichnen, sind umfangreiche Vorüberlegungen notwendig.
Es müssen Geraden- und Parabelterme gefunden sowie Definitionsbereiche festgelegt werden. Dabei kann es dem Verständnis dienen, wenn Vermutungen auch ausprobiert werden können.
Hier sind die Schritte, die auf einem ClassWiz-Rechner im Zusammenspiel mit ClassPad.net zum Ziel führen:

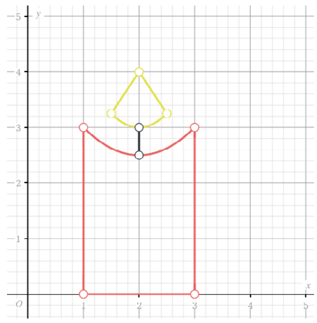












Buchtipp

Vier Handreichungen für die Klassenstufe 7 bis zum Abitur

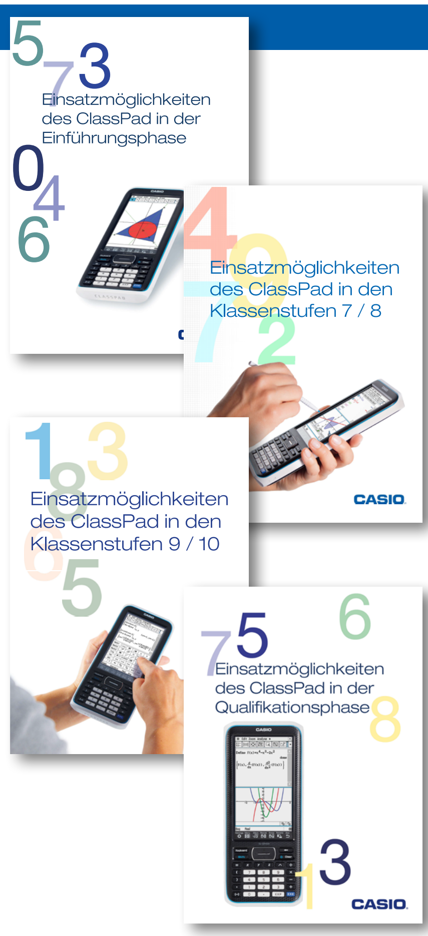
Die Kernlehrpläne der meisten Bundesländer sehen in der gymnasialen Oberstufe die Nutzung digitaler Werkzeuge wie den Casio ClassPad II verbindlich vor, z.B. zum Erkunden mathematischer Zusammenhänge oder als Rechenknecht im Unterricht und in Prüfungen. Bereits in der Sekundarstufe I sollte daher der Umgang mit solchen Werkzeugen an geeigneten Unterrichtsinhalten geübt werden.

Vorschläge für Einsatzmöglichkeiten hierzu macht Jens Weitendorf in vier Handreichungen für die Klassenstufe 7 bis zum Abitur. Die Handreichungen decken die Themenfelder Arithmetik, Funktionen, Geometrie, Analysis, Lineare Algebra und Stochastik ab. Die einzelnen Teile der Manuskripte sind tabellenartig aufgebaut. Man findet zunächst Hinweise auf den Lehrplan, die aus diesem direkt übertragen sind, daneben Abbildungen des ClassPad. In der dritten und vierten Spalte gibt es technische und didaktische Hinweise. Diese Tabellen dienen der Unterstützung der Unterrichtsvorbereitung der Kolleginnen und Kollegen, sodass auch Neueinsteiger den ClassPad ohne Probleme im Unterricht nutzen können.

Es schließen sich jeweils Arbeitsblätter für die Schülerinnen und Schüler an, die entdeckendes Lernen ermöglichen. Die Handreichungen können Sie anfordern bei education@casio.de oder als PDF-Datei herunterladen:
https://www.casio-schulrechner.de/de/lehrerschule/materialdatenbank/

Diese Bücher zeigen sehr ausführlich, auch mithilfe von konkreten Arbeitsblättern, wie der ClassPad beim Einsatz in den Klassen 7–13 das Lernen unterstützen kann.

Der Autor hat CAS selbst jahrzehntelang eingesetzt und hier Konkretes aus der Praxis geordnet zusammengetragen.



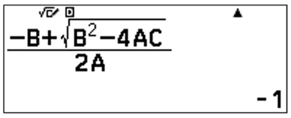
Neuerscheinung

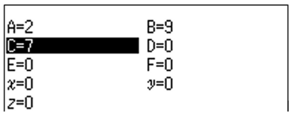
Der IQB-Standardrechner

Autoren: Casio Educational Team

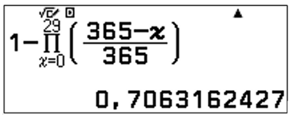
Das Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (IQB) hat Vorgaben für einen zukünftigen Standardrechner zusammengestellt, nach denen Casio einen neuen technisch-wissenschaftlichen Rechner entwickelt hat – den fx-810DE CW.

Im Zuge der Weiterentwicklung der Casio ClassWiz-Serie hat dieser Rechner einige neue Möglichkeiten, die frühere Rechner nicht hatten. Andere Funktionen dagegen, insbesondere einige statistische, durfte der Rechner nicht enthalten. Hier sind die Neuerungen zusammengestellt:
Die Variablen-Übersicht mit neun Variablen A–F und x–z ist jetzt editierbar, sodass Ausdrücke wie z.B. die Mitternachtsformel bequem mit unterschiedlichen Werten berechnet werden können. Die Nullstellen von $2x^2+9x+7$ ergeben sich durch:



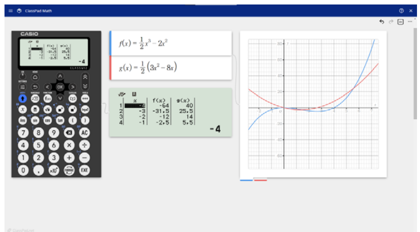


Berechnungen mit endlichen Summen und Produkten [CATALOG] [OK] sind ebenfalls weiterhin möglich. Die Frage nach der Wahrscheinlichkeit des gleichen Geburtstages in einer Gruppe von 30 Personen beantwortet sich deshalb so:



Die Einzelwahrscheinlichkeit und die kumulierte Wahrscheinlichkeit der Binomialverteilung und der Normalverteilung sind verfügbar, genauso wie die frei editierbare Wertetabelle. In der Wertetabelle gibt es neuerdings die Möglichkeit, die zweite Funktion g(x) mithilfe der ersten f(x) zu definieren, beispielsweise als $f(x)=x^2$ und $g(x)=f(x+2)$, was einige Möglichkeiten eröffnet.

Wie bereits bei den Vorgängermodellen, können die Funktionen des Gerätes in Verbindung mit einem Handy oder Tablet erweitert werden. Mittels QR-Code [SHIFT] [x] kann die Mathematik-Software ClassPad.net aufgerufen werden, die zu vielen Eingaben entsprechende Anschauung liefert. In dieser Browseranwendung finden Sie auch den Taschenrechner-Emulator und sie lässt sich zudem zum MMS/CAS upgraden.



Buchtipp

Der IQB-Standardrechner fx-810DE CW Bedienung und Aufgabenbeispiele

Die bebilderte Kurzanleitung zum fx-810DE CW führt in die Bedienung ein. Darüber hinaus werden an Aufgabenbeispielen Ideen vorgestellt, die neuen Möglichkeiten zu nutzen.
Da die beiden Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ im Speicher bleiben, bis sie aktiv gelöscht werden, können sie vielseitiger genutzt werden. Es kann damit im Rechenbereich gerechnet werden und die jeweils andere Funktion darf im Term vorkommen, z.B. $f(x)=x^2$ und $g(x)=f(x-2)+1$. Daraus ergeben sich einige interessante Anwendungsmöglichkeiten, denn in $g(x)$ kann dadurch ein im Unterricht entwickelter Term für die weitere Arbeit im Thema abgespeichert werden: z.B. die Mitternachtsformel, der Differenzenquotient, Ober- und Untersummen usw. Berechnungen mit der Answer-Taste und das grafische Darstellen der Funktionsgraphen auf dem Handy mittels QR-Code-Übertragung sind weitere Themen.

Orthogonale Regression

Autoren: Manuel García Mateos, Gymnasium am Steinwald, Neunkirchen
Michael Bostelmann, Mons-Tabor-Gymnasium Montabaur

1. Abgrenzung der orthogonalen Regression zur linearen Regression

Lineares Regressionsproblem: Ermittle zu gegebenen n Messpunkten (x_i,y_i) diejenige lineare Funktion f mit $f(x)=mx+b$, sodass die Daten möglichst gut beschrieben werden.

Das Regressionsproblem ist nicht eindeutig formuliert, da nicht erläutert wird, was unter „möglichst gut" zu verstehen ist. Wird davon ausgegangen, dass die x-Werte der Messung fehlerfrei sind und nur die y-Werte fehlerbehaftet sind, dann kann als „möglichst gut" z. B. die Summe der Beträge der Abweichungen der theoretischen von den gemessenen y-Werten betrachtet werden oder aber auch die Summe der quadratischen Abweichungen der gemessenen y-Werte von den durch das Modell berechneten theoretischen y-Werten als Gütekriterium angenommen werden *(Methode der kleinsten Quadrate, least-square-method (lsm))*. Auf jeden Fall werden nur die vertikalen Abweichungen berücksichtigt und es wird versucht, die Parameter m und b einer linearen Funktion f mit $f(x)=mx+b$ zu bestimmen, sodass
$SSE(m,b) := \sum_{i=1}^{n}(y_i - y_i^*)^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - (m \cdot x_i + b))^2$
also die Summe der Fehlerquadrate (sum of squared errors, SSE) minimal wird (s. Abbildung 1).

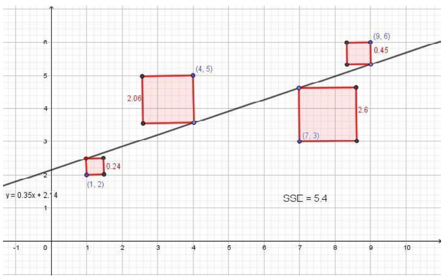


Abbildung 1: Lineare Regression und Fehlerquadrate für die Messpunkte (1|2), (4|5), (7|3) und (9|6)

Man spricht hier auch von einer **vertikalen** linearen Regression.
Was ist aber, wenn es auch fehlerbehaftete x-Werte gibt bzw. auf die Voraussetzung der fehlerfreien unabhängigen Variable x verzichtet wird? Dann ist eine lineare Funktion derart zu bestimmen, dass der **Abstand**, also die kürzeste Entfernung der Messpunkte zur Gerade minimal wird! Das ist nun aber die orthogonale Entfernung zwischen Messpunkt und Gerade. Es muss also zwischen *Abstand* (orthogonal zur Gerade) und *Abweichung* (vertikal zur Gerade) unterschieden werden (s. Abbildung 2). Diese Unterscheidung muss auf jeden Fall auch sprachlich getroffen werden.

In den Lehrplänen verschiedener Bundesländer wird die lineare Regression als Unterrichtsinhalt aufgeführt. Allerdings wird die Unterscheidung zwischen Abweichung in y-Richtung und Abstand bzw. die Voraussetzung der fehlerfreien unabhängigen Variable x nicht weiter thematisiert. Bei jeder Messung, sei es bei der Bestimmung des Umfangs eines Kreises in Abhängigkeit des Durchmessers oder bei Zusammenhängen zwischen Spannung und Stromstärke, treten jedoch Messfehler sowohl in der unabhängigen als auch der abhängigen Variable auf.

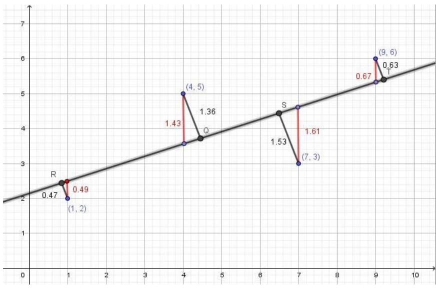


Abbildung 2: Vertikale Abweichungen im Vergleich zum orthogonalen Abstand.

In diesem Artikel soll das orthogonale lineare Regressionsproblem betrachtet werden und es ist eine lineare Funktion f mit $f(x)=mx+b$ derart zu bestimmen, dass die quadratische Summe der **Abstände** d_i der Messpunkte zur Gerade minimal wird.

2. Bestimmung der Abstandsquadratsumme und der Parameter der Regressionsgerade

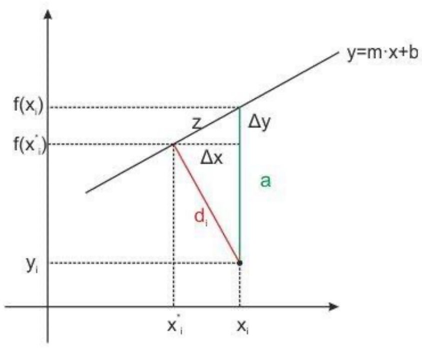


Abbildung 3: Abstand d_i eines Messpunktes zur Regressionsgerade.

Es ist $\frac{d_i}{a} = \frac{\Delta x}{z}$ bzw. $d_i^2 = \frac{\Delta x^2}{\Delta x^2+\Delta y^2} \cdot a^2 = \frac{1}{1+m^2} \cdot \left(y_i - f(x_i)\right)^2$ mit $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.
Daher ist die Summe der quadratischen Abstände („*sum of squared distances*")

$$SSD(m,b) = \frac{1}{1+m^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - (mx_i + b)\right)^2 = \frac{1}{1+m^2} \cdot SSE(m,b) < SSE(m,b)$$

Es gibt also einen funktionalen Zusammenhang zwischen der Summe der quadrierten vertikalen Abweichungen $SSE(m,b)$ und der Summe der Abstandsquadrate $SSD(m,b)$. Mithilfe der Differenzialrechnung lassen sich nun die Parameter m und b der Regressionsgerade, für die $SSD(m,b)$ minimal wird, bestimmen. Hierzu wird zunächst nach b abgeleitet und als notwendige Bedingung für b ergibt sich

$$\frac{d}{db} SSD(m,b) = -\frac{2}{1+m^2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i - m \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i - n \cdot b \right) = 0$$

Wegen $\sum_{i=1}^{n} y_i = n \cdot \underline{y}$ und $\sum_{i=1}^{n} x_i = n \cdot \underline{x}$ ergibt sich $b = \underline{y} - m \cdot \underline{x}$. Die beste Gerade verläuft also wie bei der vertikalen linearen Regression durch den Schwerpunkt $(\underline{x}|\underline{y})$ der Daten – ein zentrales Ergebnis der vertikalen als auch der orthogonalen linearen Regression.
Einsetzen dieses Ergebnisses in $SSD(m,b)$ ergibt:

$$SSD\left(m, \underline{y} - m \cdot \underline{x}\right) = \frac{1}{1+m^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(\left(y_i - \underline{y}\right) - m(x_i - \underline{x}) \right)^2$$

$$= \frac{1}{1+m^2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \underline{y}\right)^2 - 2m \sum_{i=1}^{n} (x_i - \underline{x}) \left(y_i - \underline{y}\right) + m^2 \sum_{i=1}^{n} (x_i - \underline{x})^2 \right)$$

Leitet man nun mithilfe der Quotientenregel nach m ab und formuliert die notwendige Bedingung für Extremstellen, so erhält man nach einiger Rechnung und unter Verwendung der Abkürzungen
$s_{xx} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \underline{x})^2$, $s_{yy} = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \underline{y}\right)^2$ und
$s_{xy} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \underline{x})\left(y_i - \underline{y}\right)$ den Ausdruck

$$\frac{d}{dm} SSD\left(m, \underline{y} - m \cdot \underline{x}\right) = \frac{2m^2 s_{xy} + 2m(s_{xx} - s_{yy}) - 2s_{xy}}{(1+m^2)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 s_{xy} + m(s_{xx} - s_{yy}) - s_{xy} = 0$$

$$\Leftrightarrow m_1 = \frac{s_{yy} - s_{xx} - \sqrt{\left(s_{xx} - s_{yy}\right)^2 + 4s_{xy}^2}}{2s_{xy}} \vee m_2 = \frac{s_{yy} - s_{xx} + \sqrt{\left(s_{xx} - s_{yy}\right)^2 + 4s_{xy}^2}}{2s_{xy}}$$

Die quadratische Funktion $f(m)=m2s_{xy}+m(s_{xx}-s_{yy})-s_{xy}$ in m hat zwei einfache Nullstellen mit Vorzeichenwechsel, wobei bei m_2 sowohl für $s_{xy}>0$ als auch für $s_{xy}<0$ der Vorzeichenwechsel vom negativen in den positiven Bereich stattfindet. Daher hat die Funktion $SSD(m,b)$ bei

m_2 ein Minimum und man erhält für die Parameter der linearen Funktion

$$m = \frac{s_{yy}-s_{xx}+\sqrt{(s_{xx}-s_{yy})^2+4s_{xy}^2}}{2s_{xy}} \text{ und } b = \underline{y} - m \cdot \underline{x}.$$

Die Steigung der Bestgerade bei der orthogonalen Regression unterscheidet sich also von der Steigung der Bestgerade bei der vertikalen Regression $m' = \frac{s_{xy}}{s_{xx}}$.

3. Mögliche Umsetzung im Unterricht

Es ist unvorstellbar, im Unterricht die geschlossenen Ausdrücke für die Steigung m als auch für den y-Achsenabschnitt b der Regressionsgerade mit den Schülern[1] zu erarbeiten oder gar vorzugeben. Stattdessen bietet sich ein schrittweises Vorgehen an, bei dem die bekannten Hilfsmittel der Differenzialrechnung als auch Kurvenscharen verwendet werden.
Die mögliche Umsetzung im Unterricht soll an einem Beispiel mit vier Messpunkten und mithilfe eines CAS (Casio ClassPad II) dargestellt werden (s. Abbildung 4).

Betrachten wir die Messpunkte (1|4.7), (2|9), (3|11.8) und (4|16.6) und nehmen wir mal an, dass sowohl die x- als auch die y-Werte fehlerbehaftet sein können (Schritt 1: Eingabe der x- und y-Werte als Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ sowie des Einsvektors $\vec{e}$=(1 1 1 1)).
Aus der geometrischen Anschauung heraus ergibt sich für den Abstand d_i eines Messpunktes $(x_i|y_i)$ zur besten Gerade der Ausdruck $d_i^2 = \frac{1}{1+m^2} \cdot (y_i - (m \cdot x_i + b))^2$ (s. Abbildung 3). Gesucht sind die Parameter m und b der Regressionsgerade.

Es wird eine Funktion $d(m,b)$ über das Skalarprodukt $\vec{y}-(m\cdot\vec{x}+b\cdot\vec{e})^2= \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - (mx_i + b)\right)^2$ definiert (Schritt 2).

Schritt	Umsetzung mit dem ClassPad
1	$\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}$⇒vx: $\begin{bmatrix}4.7\\9\\11.8\\16.6\end{bmatrix}$⇒vy: $\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$⇒ve $\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$
2	Define d(m,b)= $\frac{\text{norm(vy-(m·vx+b·ve))}^2}{1+m^2}$ done
3	d(m,b) $\frac{0.01\cdot(400\cdot b^2+3000\cdot m^2+m\cdot(2000\cdot b-24}{m^2+1}$
4	diff(d(m,b),b) $\frac{0.2\cdot(40\cdot b+100\cdot m-421)}{m^2+1}$
5	solve(diff(d(m,b),b)=0,b) {b=−2.5·m+10.525} −2.5·m+10.525⇒b −2.5·m+10.525
6	d(m,b) $\frac{0.0125\cdot(400\cdot m^2-3080\cdot m+5983)}{m^2+1}$
7	simplify(diff(d(m,b),m)) $\frac{0.025\cdot(1540\cdot m^2-5583\cdot m-1540)}{(m^2+1)^2}$
8	solve(diff(d(m,b),m)=0,m) {m=−0.2575416983, m=3.882866374}
9	3.882866374⇒m : b|m⇒b 0.817834065
10	d(m,b) 0.04232230835

Abbildung 4: Schrittweise Umsetzung der orthogonalen linearen Regression mit dem ClassPad.

Alternativ kann der Ausdruck auch direkt eingegeben werden, was je nach Anzahl der Messpunkte sehr viel Tipp- bzw. Schreibarbeit darstellt (Schritt 3).

Die Funktion $d(m,b)$ wird nun als Funktionenschar des Parameters m und der Variable b betrachtet. Die Ableitung von $d(m,b)$ nach b (Schritt 4) und Formulieren der notwendigen Bedingung liefert einen funktionalen Zusammenhang zwischen der möglichen Extremstelle in b der Funktionenschar und dem Parameter m (Schritt 5). Einsetzen des berechneten Wertes für b in $d(m,b)$ liefert eine Funktion in Abhängigkeit von m (Schritt 6). Im Anschluss wird nun das Funktionsminimum der parameterfreien Funktion in m bestimmt (Schritt 7 und Schritt 8). Aus der notwendigen Bedingung $d'(m,-2.5m+10.525)=0$ ergibt sich aufgrund des Verlaufes des Zählers von $d'(m,-2.5m+10.525)$, dass die positive Nullstelle das Minimum der Funktion darstellt. Hieraus ergibt sich dann die Steigung m und der y-Achsenabschnitt b der orthogonalen Regressionsgerade (Schritt 9). Für das Beispiel ergibt die lineare Funktion f mit $f(x)=3.88x+0.82$ und eine Abstandsquadratsumme $SSD(3.88,0.82)\approx 0.0423$ (Schritt 10). Die Gerade $y=3.88x+0.818$ kann im Grafik-Modul des CAS dargestellt werden (s. Abbildung 5).
Eine vertikale lineare Regression liefert die Gerade zur Funktionsgleichung $g(x)=3.85x+0.9$ und $SSE(3.85,0.9)=0.675$. Die Graphen der beiden Geraden sind in der grafischen Darstellung kaum zu unterscheiden (s. Abbildung 5).

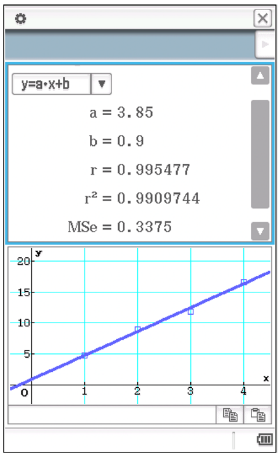


Abbildung 5: Grafische Darstellung der orthogonalen und vertikalen Regression und Parameter der vertikalen linearen Regression.

Die Funktionenschar $d(m,b)$ lässt sich auch grafisch als Funktion von b in Abhängigkeit des Parameters m darstellen (s. Abbildung 6). Mithilfe eines Schiebereglers kann dann der Parameterwert m eingeschränkt und $SSD(m,b)$ grafisch ermittelt werden. Über den **seq**-Befehl lässt sich eine Funktionenschar in m darstellen.

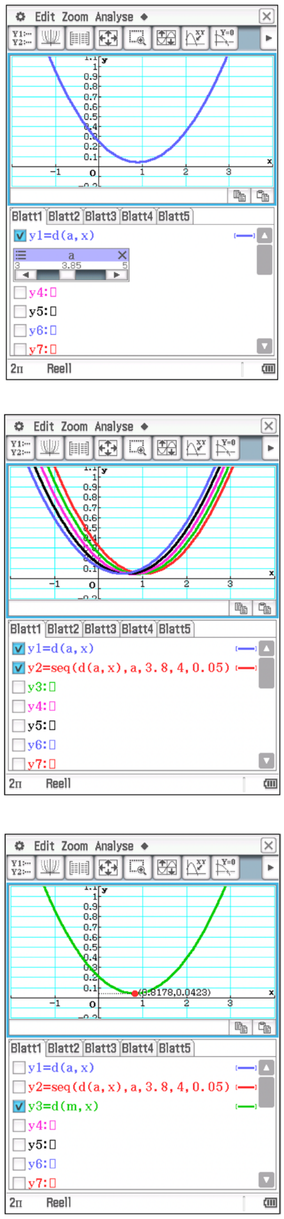


Abbildung 6: Grafische Näherungslösung für $SSD(m,b)$ in m.

4. Fazit und mögliches Weiterarbeiten

Auch wenn im Unterricht auf die orthogonale lineare Regression verzichtet wird, erscheint es dennoch sinnvoll, die Voraussetzung der fehlerfreien x-Werte bei der vertikalen linearen Regression zu thematisieren. Bei Kenntnis des Parameters m' der vertikalen linearen Regression wird man auf den ersten Blick kaum auf den entsprechenden Parameter m der orthogonalen Regression schließen können. Dazu sind die Ausdrücke zu unterschiedlich. Interessant wäre es dennoch. Auch wäre es interessant zu wissen, wie groß die Abweichungen zwischen den beiden Steigungen der entsprechenden Regressionen sind.
Die entsprechenden Parameter b der Regressionsgeraden ergeben sich dann wegen $b= \underline{y} - m \cdot \underline{x}$ aus der Steigung.

1 Es wird auf eine Formulierung „Schülerinnen und Schüler“ zugunsten einer besseren Lesbarkeit verzichtet und stattdessen nur die männliche Form verwendet.

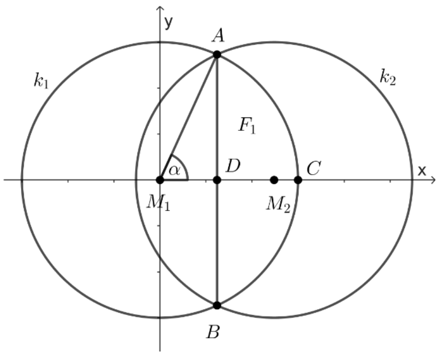
Aufgabenbeispiel

Die Bierdeckelaufgabe mit dem CASIO fx-810DE CW

Autor: Dr. Wolfgang Ludwicki, Tangermünde

Gegeben sind zwei Bierdeckel, die beide den genormten Durchmesser $d=107\ mm$ haben. Wie weit muss man sie übereinanderschieben, damit genau die Hälfte der Fläche der Bierdeckel überdeckt ist?

Die folgende Abbildung veranschaulicht den Sachverhalt.



Die Punkte M_1 und M_2 sind die Mittelpunkte der Kreise k_1 bzw. k_2, die die Bierdeckel mit dem Radius r darstellen. Die Länge a der Strecke $\overline{M_1M_2}$ ist ein Maß für die Verschiebung der Bierdeckel. Der Flächeninhalt der Bierdeckel sei mit F bezeichnet, der der überdeckten Fläche mit $F_Ü$. Die Fläche $F_Ü$ setzt sich aus zwei kongruenten Kreisabschnitten zusammen. Der halbe Flächeninhalt eines solchen Kreisabschnittes sei mit F_1 bezeichnet. Das Flächenstück, das von den Strecken $\overline{AD}$, $\overline{CD}$ und dem Kreisbogen $\widehat{AC}$ begrenzt wird, hat den Flächeninhalt F_1.

Die Aufgabe verlangt die Ermittlung von α, wenn $F_Ü=\frac{1}{2}F$, also $4F_1=\frac{1}{2}F$.

Der Flächeninhalt F_1 ergibt sich, wenn vom Flächeninhalt des Kreissektors M_1AC der Flächeninhalt des Dreiecks M_1DA abgezogen wird. Wenn der Winkel $\angle CM_1A$ im Bogenmaß die Größe α hat, so folgt:

$$F_1=\frac{1}{2}r^2\cdot\alpha-\frac{1}{2}r^2\cdot cos\ cos\ \alpha\cdot sin\ sin\ \alpha\,,$$
$$F_1=\frac{1}{2}r^2\cdot\alpha-\frac{1}{4}r^2\cdot sin\ sin\ 2\alpha\,,$$
$$\frac{1}{8}F=\frac{1}{2}r^2\cdot\alpha-\frac{1}{4}r^2\cdot sin\ sin\ 2\alpha\,,$$
$$\pi r^2=4r^2\cdot\alpha-2r^2\cdot sin\ sin\ 2\alpha\,,$$
$$0=\pi-4\alpha+2\ sin\ sin\ 2\alpha\ .$$

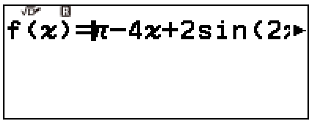
Die letzte Gleichung ist eine transzendente Gleichung für α. Wird aus der letzten Gleichung α näherungsweise numerisch errechnet, so ergibt sich die Verschiebung als
$a=2r\cdot cos\ cos\ \alpha=107mm\cdot cos\ cos\ \alpha$.

Die Größe des Winkels α lässt sich mithilfe des Newton-Verfahrens als Nullstelle der Funktion
$f(x)=\pi-4x+2sinsin\ 2x$
berechnen. Die erste Ableitung von f ist $f'(x)=-4+4cos\ cos\ 2x$.
Werden auf dem CASIO fx-810DE CW die Funktion $f(x)=\pi-4x+2sin\ sin\ 2x$ und die Funktion $g(x)=-4+4sin\ sin\ 2x$ definiert, so lässt sich die Iterationsgleichung in der Form

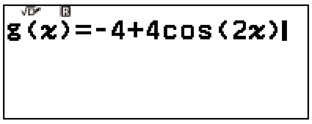
$$Ans-\frac{f(Ans)}{g(Ans)}$$

eingeben. Bevor diese Gleichung eingegeben wird, wird als Startwert 1 eingegeben.

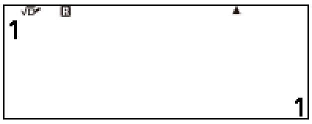
Folgende Tastenbetätigungen führen zum Ziel:
f(x) ⌄ ⌄ OK ⇧ 7 − 4 x + 2 sin 2 x) OK



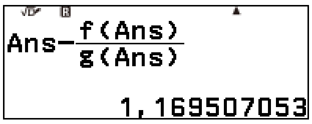
f(x) ⌄ ⌄ ⌄ OK ⇧ − 4 + 4 cos 2 x) OK



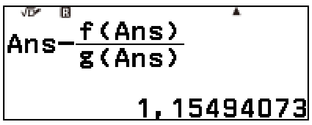
1 OK



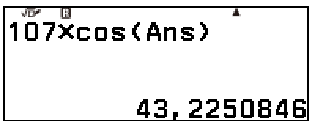
Ans − ▭ f(x) OK Ans) ⌄ f(x) ⌄ OK Ans) OK



OK OK OK OK

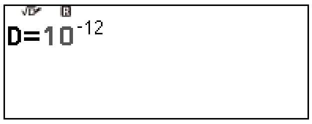


Bereits nach dem 4. Iterationswert ändert sich die Anzeige nicht mehr.
Folglich ist $\alpha=1.15494073$ rad im Rahmen der Taschenrechnergenauigkeit.
1 0 7 × cos Ans) OK

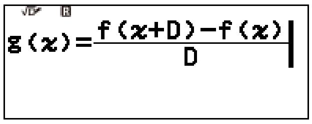


Die gesuchte Verschiebung beträgt
$a=107mm\cdot cos\ cos\ 1.15494073$
$\approx 43{,}2mm$.

Statt die Ableitung f' formal auszurechnen, kann man auch die Ableitung mit dem Näherungswert $\frac{f(x+D)-f(x)}{D}$ als Funktion $g(x)$ eingeben. Die Variable D kann mit $D=10^{-12}$ eingegeben werden.
Die Eingabe von D erfolgt mittels
x ⌄ ⟩ 1 0 ▪ ⇧ − 1 2



Die Funktion $g(x)$ wird so definiert
f(x) ⌄ ⌄ ⌄ OK ▭ f(x) OK x + ⇧ 1) − f(x) OK x) ⌄ ⇧ 1 OK



Auch bei diesem Vorgehen tritt bereits nach dem 4. Iterationsschritt keine weitere Verbesserung ein.
Eine weitere Möglichkeit zur Bestimmung von α besteht darin, die Gleichung

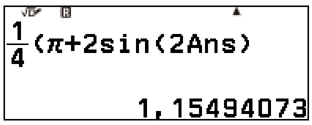
$$0=\pi-4\alpha+2\ sin\ sin\ 2\alpha$$

folgendermaßen nach α umzustellen

$$\alpha=14(\pi+2\ sin\ sin\ 2\alpha)\ .$$

Es zeigt sich, dass die resultierende Iterationsfolge zwar konvergiert, aber sehr langsam. Wird als Startwert wieder 1 gewählt, so ändert sich die Anzeige erst nach dem 49. Iterationsschritt nicht mehr

▭ 1 ⌄ 4 ⟩ (⇧ 7 + 2 sin 2 Ans) OK OK OK OK OK OK OK OK OK OK OK OK OK OK OK OK OK OK OK OK OK OK OK OK OK OK OK OK OK OK OK OK OK OK OK OK OK OK OK OK OK OK OK OK OK OK OK OK OK OK



Wird die Berechnung des Flächeninhalts F_1 mithilfe der **Integralrechnung** vorgenommen, dann ergibt sich ein anderer Lösungsansatz:

$$F_1=\int_{\frac{a}{2}}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx\,,\ F_1=\left[\frac{1}{2}\left(r^2\arcsin\left(\frac{x}{r}\right)+x\sqrt{r^2-x^2}\right)\right]_{\frac{a}{2}}^{r},\ F_1$$
$$=\frac{1}{4}r^2\cdot\pi-\frac{1}{2}r^2\arcsin\left(\frac{a}{2r}\right)-\frac{a}{8}\sqrt{4r^2-a^2}\ .$$

Da $F_1=\frac{1}{8}\pi r^2$ gelten soll, ist schließlich die Gleichung

Fortsetzung: Die Bierdeckelaufgabe

$$0 = -r^2 \cdot \pi + 4r^2 \, arcsin\left(\frac{a}{2r}\right) + a\sqrt{4r^2 - a^2}$$

bezüglich a zu lösen. Es bietet sich an, auf dem CASIO fx-810DE CW mit dem Newton-Verfahren zu arbeiten.
Es wird

$$f(x) = -C^2 \cdot \pi + 4C^2 sin^{-1}\left(\frac{x}{2C}\right) + x\sqrt{4C^2 - x^2}$$

definiert.
Der Variable C wird der Wert 53,5 zugewiesen.
Die erste Ableitung f' berechnet sich zu

$$f'(x) = 4C^2 \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2C}\right)^2}} \cdot \frac{1}{2C} + \sqrt{4C^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4C^2 - x^2}} = 2\sqrt{4C^2 - x^2}.$$

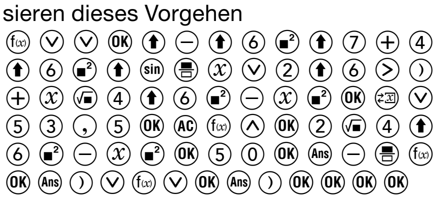
Die Funktion $g(x)$ wird als
$g(x) = 2\sqrt{4C^2 - x^2}$ definiert.

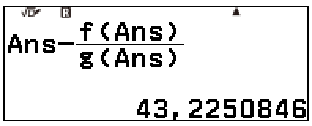
Als Startwert für die Iterationsfolge

$$Ans - \frac{f(Ans)}{g(Ans)}$$

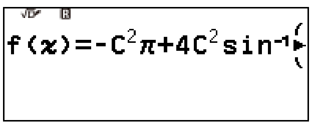
erscheint 50 sinnvoll.

Die folgenden Tastenbetätigungen realisieren dieses Vorgehen

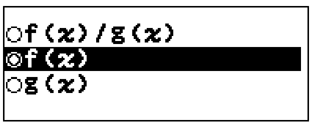




Bereits nach dem 4. Iterationswert ändert sich die Anzeige nicht mehr.
Wenn die Bierdeckel um ca. 43,2 mm verschoben werden, überdecken sie sich zur Hälfte.
Die Lösung mit dem Integralansatz lässt sich auch mit der Zehnteilungsmethode beenden.
Dazu wird die Funktion f, wie oben beschrieben, definiert.

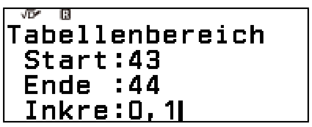


Der Tabellentyp wird auf $f(x)$



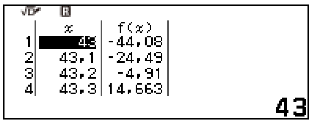
eingestellt.

Der Tabellenbereich wird als

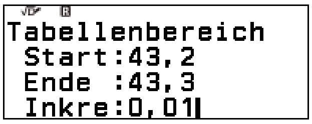


festgelegt.

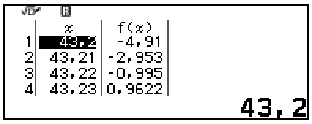
Nach „Ausführen“ führt das zu



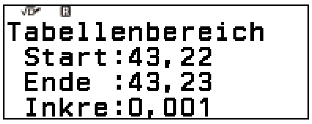
Die Lösung liegt also zwischen 43,2 und 43,3.
Erneutes Festlegen des Tabellenbereiches



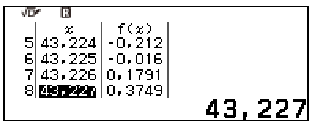
führt zu



Die Lösung liegt somit zwischen 43,22 und 43,23.
Erneutes Festlegen des Tabellenbereiches



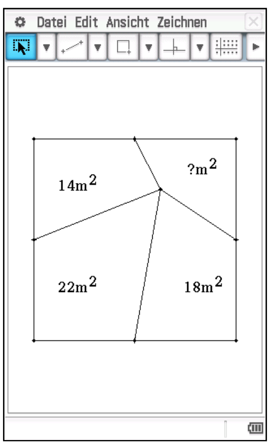
führt zu



Die Lösung liegt somit zwischen 43,225 mm und 43,226 mm.
So fortfahrend, ließe sich die Lösung noch genauer ermitteln.

Rätselecke

Von den Seitenmitten des Quadrates zu einem Punkt im Innern wurden vier Verbindungslinien gezogen. Dadurch entstehen vier Flächen. Drei der Flächeninhalte in diesem Quadrat sind bekannt. Wie groß ist die vierte Fläche?



Klausur-Tipp

Integrale und Gleichungen in der Klausur

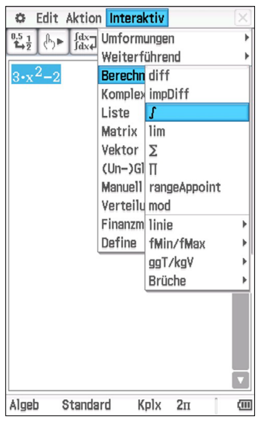
Vor einer Klausur ist es sinnvoll, alle ClassPads durch einen Reset auf denselben Stand zu bringen. „System“, „Reset“, „Alles Obige“. Die Schüler gehen z.B. in die Menüs und die Lehrkraft drückt „OK“, wenn sie die Arbeit austeilt. Der Prüfungsmodus ist dann obsolet.

Zudem wäre es sinnvoll, wenn die Schüler das **Interaktiv-Menü** kennen und wissen, dass das dort angebotene numerische Rechnen in bestimmten Fällen sehr viel schneller und leichter zu Ergebnissen führt als das algebraische Rechnen. Oft ist die Einstellung „Dezimal“ und „Reell“ unter dem Bildschirm schon schneller.

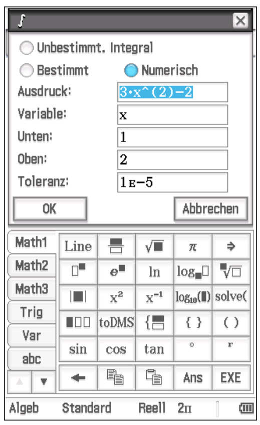
Der „An/Clear"-Knopf unterbricht übrigens das algebraische Rechnen, ebenso der „Restart"-Knopf auf der Rückseite. Natürlich ist es auch vorteilhaft, das neueste Betriebssystem zu benutzen.

Interaktiv-Menü
Die einfachste Art, mit einem CAS zu arbeiten, ist das INTERAKTIV-Menü des ClassPad:

Term eingeben
Geben Sie den Term ein, den Sie bearbeiten bzw. berechnen möchten.



INTERAKTIV
Markieren Sie den Term und wählen Sie aus dem Menü einen Befehl.



Berechnung
Mit Bestätigung (OK) des Assistenten wird die Berechnung ausgeführt.

Berechnung von Vertrauensintervallen mit dem CASIO fx-810DE CW

Autor: Dr. Wolfgang Ludwicki, Tangermünde

Der Einsatz des Taschenrechners fx-810DE CW bei der Ermittlung von Konfidenzintervallen wird an folgender Aufgabe demonstriert:

Bei einer Kontrolle wurde festgestellt, dass von 548 Fahrern nur 411 den Sicherheitsgurt anlegten. Bestimmen Sie das Vertrauensintervall, in dem mit 90% Sicherheit der Anteil derjenigen unter allen Autofahrern liegt, die sich anschnallen.

Der Aufgabe wird entnommen:
$n = 548$; $h = \frac{411}{548}$ und $\beta = 0{,}90$.

Wenn bei einer Bernoullikette der Länge n die relative Häufigkeit h beobachtet wird, dann werden die Grenzen des β–Vertrauensintervalls $I = [p_1; p_2] = \{x \mid p_1 \leq x \leq p_2\}$ zu einer vorgegebenen Vertrauenswahrscheinlichkeit β exakt bestimmt, indem die Gleichung

$$|h - p| = C\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

nach p aufgelöst wird.
Dabei ist $C = \Phi^{-1}\left(\frac{1+\beta}{2}\right)$.

Näherungslösungen können mithilfe der Formeln

$$p_1 \approx h - C\sqrt{\frac{h(1-h)}{n}} \text{ und } p_2 \approx h + C\sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}$$

ermittelt werden.

Da auf dem fx-810DE CW in der Anwendung „Verteilung" die inverse Normalverteilung Φ^{-1} nicht zur Verfügung steht, gestaltet sich die Ermittlung von C etwas schwierig. Durch Probieren kann mittels „Kum. Normal-V." C aus $\Phi(C) = \frac{1+\beta}{2}$ ermittelt werden.

Günstiger ist die Verwendung einer Tabelle. Hier ist ein Auszug aus „Mathematisch-naturwissenschaftliche Formelsammlung" des IQB[1]

Sigma-Regeln

Ist X eine normalverteilte Zufallsgröße, so gilt:

- $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 68{,}3\,\%$
- $P(\mu - 1{,}64\sigma \leq X \leq \mu + 1{,}64\sigma) \approx 90{,}0\,\%$
- $P(\mu - 1{,}96\sigma \leq X \leq \mu + 1{,}96\sigma) \approx 95{,}0\,\%$
- $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 95{,}4\,\%$
- $P(\mu - 2{,}58\sigma \leq X \leq \mu + 2{,}58\sigma) \approx 99{,}0\,\%$
- $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 99{,}7\,\%$

Prognoseintervall und Konfidenzintervall

Für eine binomialverteilte Zufallsgröße gilt näherungsweise:

- Prognoseintervall: $\left[p - c \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}; p + c \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}\right]$
- Die Gleichung $|h - p| = c \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}$ liefert die beiden Grenzen eines Konfidenzintervalls für den Wert von p.

Der Tabelle kann man entnehmen:
Zu $\beta = 0{,}9$ gehört $C \approx 1{,}64$.
Die Lösungen der Gleichung

$$|h - p| = C\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

können als Lösungen einer quadratischen Gleichung berechnet werden. Das erfordert einige Umformungen, bis die Lösungsformel für quadratische Gleichungen zur Anwendung kommen kann.

Weniger aufwändig wird es, wenn die Lösungen der Gleichung mittels Iteration ermittelt werden.
Für $h \geq p$ ergibt sich

$$p = h - C\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}.$$

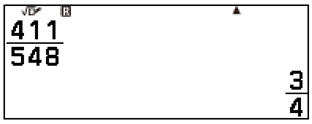
Diese Gleichung eignet sich als Iterationsgleichung

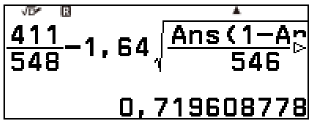
$$p_{n+1} = h - C\sqrt{\frac{p_n(1-p_n)}{n}}.$$

Wird $p_0 = h$ als Startwert gewählt, so konvergiert die Folge (p_n) gegen die untere Grenze p_1 des Vertrauensintervalls.
Wird als Iterationsgleichung

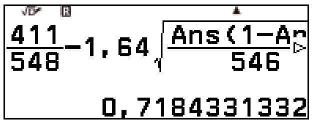
$$p_{n+1} = h + C\sqrt{\frac{p_n(1-p_n)}{n}}$$

verwandt und $p_0 = h$ als Startwert gewählt, so konvergiert diese Folge (p_n) gegen die obere Grenze p_2 des Vertrauensintervalls.
Alle Eingaben erfolgen im Menü „Berechnung". Zunächst wird p_0 als $\frac{411}{548}$ eingegeben

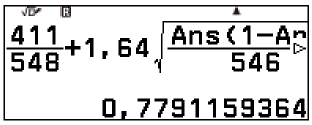




Anschließend wird die Iterationsgleichung mithilfe von ***ANS*** eingetippt. Fortgesetztes Betätigen der Taste ***EXE*** zeigt, dass die Folge konvergiert mit dem Grenzwert ≈0,7184.



Wird in dem zuletzt eingegebenen Term das Minus zu Plus geändert, erkennt man durch wiederholtes Betätigen der Taste ***EXE***, dass die obere Grenze des Vertrauensintervalls ≈0,7791 beträgt.



Damit ist [0,72;0,78] das 90%-Vertrauensintervall.

Die Berechnung der Grenzen des Vertrauensintervalls mithilfe der Näherungsformeln gestaltet sich günstig, wenn zunächst $= \frac{411}{548}$ gespeichert wird, z. B. in Speicher **A**.

Mit $A - 1{,}64 \cdot \sqrt{\frac{A(1-A)}{548}}$ und $A + 1{,}64 \cdot \sqrt{\frac{A(1-A)}{548}}$ ergeben sich die untere bzw. obere Grenze des Vertrauensintervalls zu 0,7196 bzw. 0,7803.

1: https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/dokumente/mathematik

Zweimal Sierpinski-Dreieck mit dem CASIO fx-CG50

Autor: Dr. Wolfgang Ludwicki, Tangermünde

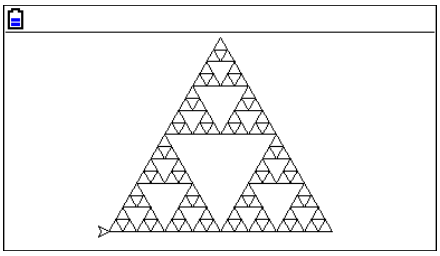
Das Sierpinski-Dreieck ist ein Fraktal, das der polnische Mathematiker WACŁAW SIERPIŃSKI (1882–1969) 1916 beschrieben hat. Zu seiner Erzeugung wird von einem eingefärbten gleichseitigen Dreieck ausgegangen. Die Mittelpunkte der Seiten werden geradlinig miteinander verbunden. Das mittlere der auf diese Weise entstandenen gleichseitigen Dreiecke wird entfernt. Beim nächsten Schritt wird diese Regel auf die drei verbliebenen Dreiecke angewandt. Durch Wiederholung dieser Schritte entsteht eine selbstähnliche Figur – ein Fraktal.

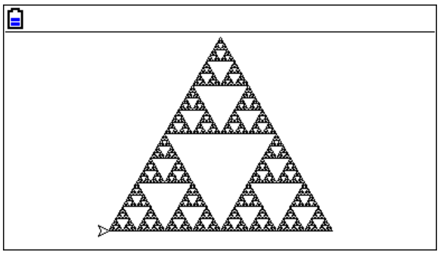
Hier wird diese Figur mittels eines Pythonprogramms auf dem fx-CG50 erzeugt. Dazu wird das Modul **turtle** verwendet, das auf https://www.casio-education.fr heruntergeladen werden kann. Da im **turtle-Modul** kein eigener Befehl zum Füllen von Polygonen vorhanden ist, werden hier nur Dreiecke dargestellt. Die Konstruktionsvorschrift für das Sierpinski-Dreieck legt die Verwendung einer rekursiven Funktion nahe:

```
from turtle import*
s=200
def sierpinski(n,s):
if n>=0:
for i in range(3):
sierpinski(n-1,s/2)
forward(s)
left(120)
penup()
goto(-100,-80)
pendown()
n=int(input("n:"))
sierpinski(n,s)
```

Die Python-Bibliothek **turtle** verwendet ein Koordinatensystem mit den Eckpunkten (-200, 100), (-200, -100), (200, -100) und (200, 100). In der Variablen s wird die Seitenlänge des Ausgangsdreiecks gespeichert. Der Parameter n in der Funktion `sierpinski` steht für die Rekursionstiefe und muss vom Nutzer eingegeben werden. Dafür sorgt der Befehl `n=int(input("n:"))`. Bei der Rekursionstiefe null wird nur das gleichseitige Dreiecke gezeichnet, von dem ausgegangen wird. Der Befehl `forward(s)` bewegt die Schildkröte um s vorwärts, `left(120)` bewirkt eine Richtungsänderung um 120° nach links. Durch `penup()` wird der Zeichenstift angehoben, die Schildkröte hinterlässt keine Spur. Mit `goto(-100,-80)` wird die Schildkröte in den Punkt (-100,-80) platziert. Nach `pendown()` zeichnet die Schildkröte ihre Spur.

Die Abbildungen zeigen die Ergebnisse für $n=4$ und $n=6$.





Das Sierpinski-Dreieck ergibt sich auch, wenn das Chaos-Spiel, das von MICHAEL F. BARNSLEY (geb. 1946) erdacht wurde, realisiert wird.

Zur Ausführung des Chaos-Spiels werden in einer Zeichenebene die Punkte P_1, P_2 und P_3, welche die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks sind, eingezeichnet. Weiterhin wird ein Spielpunkt S_0 in der Zeichenebene zufällig markiert.
Aus der Menge {1,2,3} wird zufällig ein Element w gewählt. Der nächste Spielpunkt S_1, der gezeichnet wird, ist dann der Mittelpunkt der Strecke $\overline{S_0P_w}$. Die nächsten Spielpunkte ergeben sich nach genau demselben Vorgehen, wobei vom neuen Spielpunkt ausgegangen wird.

Das folgende Programm realisiert diesen Algorithmus. Im Ergebnis entsteht ein Muster, das sich einem Sierpinski-Dreieck annähert.

```
from random import *
from casioplot import *
x1=100
y1=180
x2=300
y2=180
x3=200
y3=10
x=100
y=100
for i in range(100000):
w=randint(1,3)
if w==1:
x=(x1+x)//2
y=(y1+y)//2
if w==2:
x=(x2+x)//2
y=(y2+y)//2
if w==3:
x=(x3+x)//2
y=(y3+y)//2
set _ pixel(x,y,(20,20,200))
show _ screen()
```

Zur Berechnung der Zufallszahlen muss das Modul **random** eingebunden werden. Bei diesem Programm wird vorausgesetzt, dass das CASIO-Modul **casioplot** zur Verfügung steht, also das Betriebssystem in der Version 3.40 installiert ist.
Die Zeichenebene für **casioplot** hat die Eckpunkte (0,0), (0,191), (383,191) und (383,0).

Mit dem Befehl
`set_pixel(x,y,(20,20,200))` wird ein blaues Pixel an die Stelle (x,y) gezeichnet. Da bei der Berechnung von x und y die ganzzahlige Division // verwendet wird, sind x und y ganzzahlig.
Der Befehl `show_screen()` zeigt den Zeichenbildschirm an.

Die Ausgangspunkte sind hier nur näherungsweise die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks, was aber am Wesen des Ergebnisses nichts ändert.

Lehrer-Info-Service

Maßgeschneiderte Informationen für Mathematiklehrkräfte

Die kontinuierliche Bereitstellung von Unterrichtsmaterial, das zum einen mit den Anforderungen der Lehrpläne in den Bundesländern harmoniert und zum anderen den Einsatz und die Bedienung der Schulrechner erleichtert, ist ein Herzstück des Lehrersupports von CASIO. Dafür steht CASIO in regelmäßigem Austausch mit Mathematiklehrkräften.

Informationsaussand zum Beispiel zu folgenden Themen:
- CASIO forum mit vielen Aufgabenbeispielen und Unterrichtseinheiten,
- Informationen zu regionalen Veranstaltungen,
- Neuerungen in den Zulassungsrichtlinien,
- bundeslandspezifische Angebote,
- Lehrerspezial holt reale Alltagsthemen in den Mathematikunterricht.

Das Feedback aus der Lehrerschaft zeigt – ein Service, der geschätzt wird.

Anmeldung
Sie möchten ebenfalls maßgeschneiderte Informationen für Mathematiklehrkräfte erhalten – dann sind Sie herzlich beim Lehrer-Info-Service von CASIO willkommen. Ob per Post oder per E-Mail – Sie entscheiden selbst, wie Sie von CASIO kontaktiert werden möchten, und haben jederzeit die Gelegenheit, sich auch wieder abzumelden.

Anmeldung im Netz
www.casio-schulrechner.de/lehrerinfoservice

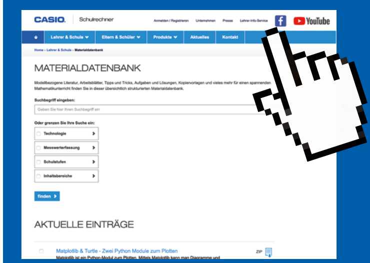
oder einfach den **QR-Code** scannen.

Materialdatenbank

Materialien für den Unterricht

Modellbezogene Literatur, Arbeitsblätter, Tipps und Tricks, Aufgaben und Lösungen, Kopiervorlagen und vieles mehr für einen spannenden Mathematikunterricht finden Sie in dieser übersichtlich strukturierten Materialdatenbank. Sie haben selbst Unterrichtsmaterial erstellt, das Sie teilen möchten? Dann kontaktieren Sie gern die Redaktion.

Im Netz
www.casio-schulrechner.de/materialdatenbank



oder einfach den **QR-Code** scannen.

Software

Aktuelle Betriebssystemversionen

Die Updates sowie die Testsoftware stehen zum kostenlosen Herunterladen auf unserer Internetseite bereit: **edu.casio.com**

Gerät	OS-Version
ClassPad II	2.01.7002
fx-CG50	3.80
fx-9860GIII	3.70
Software	
ClassPad II Manager	2.01.7002
ClassPad App	über App-Stores (Android/IOS)
fx-CG50 Manager	3.80
fx-Manager Plus	3.70
ClassWiz Emulator	casio-education.eu

Updates bis August 2025

Kontakt

Ihre Kontakte zu CASIO

Educational Team
Telefon: +49 (0)40/528 65-0
Fax: +49 (0)40/528 65-100
E-Mail: education@casio.de
Homepage: www.casio-schulrechner.de

European Support Center
Beratung und technische Informationen
Telefon: +49 (0)40/528 65-802
Fax: +49 (0)40/528 65-888
E-Mail: support_center@casio.de

Anfragen zu Reparaturen
Telefon: +49 (0)40/528 65-203
Fax: +49 (0)40/528 65-242
E-Mail: repair@casio.de

Lehrersupport

CASIO Support für Lehrer!

Ob technisch-wissenschaftlicher Rechner oder Grafikrechner – mit dem umfangreichen Support-Programm von CASIO unterstützt Sie das Educational Team bestens bei der Auswahl des passenden Schulrechners bis hin zur Gestaltung Ihres Unterrichts.

Support-Programm
- Referenzschulen
- Lehrer-Workshops
- Lehrer-Info-Service (u.a. CASIO forum)
- Leihprogramme
- Prüfangebote
- Literatur
- Materialdatenbank

Impressum

Herausgeber:
CASIO Europe GmbH
Casio-Platz 1 • 22848 Norderstedt
Tel.: 040/528 65-0 • Fax: 040/528 65-535

Redaktion:
Gerhard Glas und Armin Baeger
CASIO Educational Team • education@casio.de

Bildquellen:
S. 1: Dirk Schneider

Design:
Dirk Schneider, CONSEQUENCE NEXT, Hamburg

Technische Änderungen und Irrtümer vorbehalten. Die Abbildungsgrößen entsprechen nicht den Originalgrößen. Die Farben können leicht vom Original abweichen.
Stand: Juli 2025.

4 549526 618499

125SGR-FORUM33-DE