IlirsMatheAbiVorbereitung

Aufgabe 10

Analysis 4.0

Analysis

2. Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f_{a;b}$ mit

$$f_{a;b}(x) = ax^3 - bx$$

mit $a, b \in \mathbb{R}^+$. Die Abbildung 6.1 zeigt den Graphen einer der Funktionen der Schar.

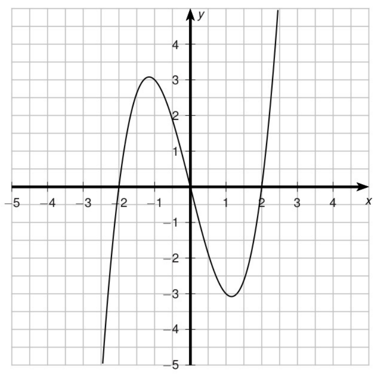


Abbildung 6.1

a) **Beweisen** Sie, dass jeder Graph der Schar $f_{a;b}$ symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs ist. **(4 BE)**

Für Punktsymmetrie muss gelten:

$f(-x) = -f(x)$ Beispiel: $x = 1$

$f_{a;b}(-x) = a \cdot (-x)^3 - b \cdot (-x)$

$= -ax^3 + bx$

$-f_{a;b}(x) = -(ax^3 - bx)$

$= -ax^3 + bx$

Bemerkung: Nur ungerade Exponenten zeigen die Punktsymmetrie.

b) **Bestimmen** Sie die von a und b abhängige x-Koordinate der Tiefpunkte der Graphen von $f_{a;b}$. **(3 BE)**

b) $f'_{a;b}(x) = 3ax^2 - b$

$3ax^2 - b = 0 \quad | + b$

$3ax^2 = b \quad | : 3a$

$x^2 = \frac{b}{3a} \quad | \sqrt{}$

$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{b}{3a}}$

Da $a, b \in \mathbb{R}^+$, ist $x_1 = \sqrt{\frac{b}{3a}}$ die x-Koordinate der Tiefpunkte.

c) Es gibt eine Funktion der Schar, die bei $x = 3$ eine Nullstelle hat und deren Graph im vierten Quadranten mit der x-Achse ein Flächenstück mit dem Inhalt 40,5 einschließt.

Geben Sie die genannten Bedingungen in Form einer mathematischen Gleichung **an**. Die Lösung einer der beiden Gleichungen hat das Ergebnis $b = 9a$.

Berechnen Sie a und b. **(5 BE)**

c) I. $f_{a;b}(3) = a \cdot 3^3 - b \cdot 3$

$= 27a - 3b = 0$

II. $\int_0^3 f_{a;b}(x)\,dx = \int_0^3 (ax^3 - bx)\,dx = -40{,}5$ (negativer Flächeninhalt!)

I. $27a - 3b = 0 \quad | + 3b$

$27a = 3b \quad | : 3$

$9a = b$

in II einsetzen:

$$\int_0^3 (ax^3 - bx)\,dx = \int_0^3 (ax^3 - 9ax)\,dx = \left[\frac{a}{4}x^4 - \frac{9a}{2}x^2\right]_0^3$$

$$= \frac{a}{4}\cdot 3^4 - \frac{9a}{2}\cdot 3^2$$

$$= \frac{81}{4}a - \frac{81}{2}a$$

$$= -\frac{81}{4}a = -40{,}5 \qquad \Big| : \left(-\frac{81}{4}\right)$$

$$a = 2$$

in I einsetzen:

$$27 \cdot 2 - 3b = 54 - 3b = 0 \qquad | +3b$$

$$54 = 3b \qquad | : 3$$

$$18 = b$$

Die Funktion der Schar, deren Graph in der Abbildung 6.1 dargestellt ist, wird mit *f* bezeichnet; ihr Funktionsterm ist

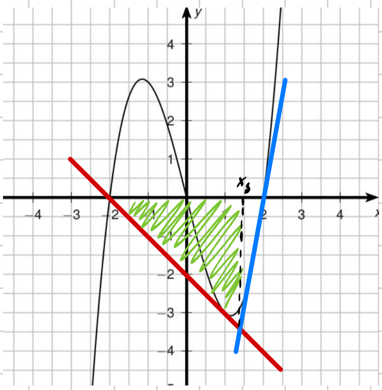
$$f(x) = x^3 - 4x.$$

d) Die Tangente *t* an den Graphen von *f* im Punkt $A(2|0)$, die *x*-Achse und die Gerade *g* mit

$$g(x) = -x - 2$$

schließen ein Dreieck ein.

Beschreiben Sie, wie man die Fläche dieses Dreiecks bestimmen könnte. Veranschaulichen Sie Ihre Lösung. **(4 BE)**



1. f ableiten und 2 in f' einsetzen. Ergebnis $=: m$
2. $h(x) = mx + b$. Für x 2 einsetzen, $h(2) = 0$ und b herausfinden.

   Damit hat man die Funktionsgleichung der 2. Tangente.
3. SP von T_1 und T_2 ausrechnen (x-Koordinate reicht). x_s ist die Koordinate.
4. Nullstellen beider Tangenten durch Äquivalenzumformungen bestimmen.
5. $g(x_s)$ berechnen.
6. $A_\Delta = \frac{g \cdot h}{2}$ Grundseite: Differenz beider Nullstellen im Betrag

   $g(x_s)$ ist die Höhe des Dreiecks

e) Begründen Sie, dass die folgende Aussage richtig ist:

Ist P ein beliebiger Punkt auf dem Graphen von f, so liegt der Mittelpunkt der Verbindungsstrecke von P und dem Koordinatenursprung auf dem Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion h mit

$$h(x) = 4x^3 - 4x.$$

(4 BE)

e) $P(p|q)$, M bei $M\left(\frac{p}{2} \middle| \frac{f(p)}{2}\right)$

$$h\left(\frac{p}{2}\right) = 4\cdot\left(\frac{p}{2}\right)^3 - 4\left(\frac{p}{2}\right)$$
$$= 4\cdot\frac{p^3}{8} - 4\cdot\frac{p}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot p^3 - 4\frac{p}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot p^3 - 2p$$
$$= \frac{1}{2}(p^3 - 4p)$$
$$= \frac{1}{2}f(p)$$

✓