IlirsMatheAbiVorbereitung

Aufgabe 11

Analysis 5.0

ILIR RECHNET DAS!

Analysis

1. Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_a mit

$$f_a(x) = \frac{1}{a^3}x^3 - \frac{1}{a}x^2 + x$$

und $a \in \mathbb{R}^+$.

a) **Berechnen** Sie die Stellen, an denen der Graph von f_4 eine Steigung von $-\frac{1}{4}$ hat. **(3 BE)**

a) $f_4(x) = \frac{1}{4^3}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + x$

$= \frac{1}{64}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + x$

$f_4'(x) = \frac{3}{64}x^2 - \frac{1}{2}x + 1$

$\frac{3}{64}x^2 - \frac{1}{2}x + 1 = -\frac{1}{4} \quad | + \frac{1}{4}$

$\frac{3}{64}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{4} = 0 \quad | : \frac{3}{64}$

$x^2 - \frac{32}{3}x + \frac{80}{3} = 0$

p q

$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

$-\frac{\left(-\frac{32}{3}\right)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\left(-\frac{32}{3}\right)}{2}\right)^2 - \frac{80}{3}}$

$x_1 = \frac{20}{3}$ für +

$x_2 = 4$ für −

$\Rightarrow$ Für $x_1 = \frac{20}{3}$ und $x_2 = 4$ beträgt die Steigung von $f_4(x)$ $-\frac{1}{4}$.

b) **Ermitteln** Sie die Koordinaten der gemeinsamen Punkte der Graphen von f_1 und f_2.

Weisen Sie **nach**, dass es genau einen Punkt gibt, der auf jedem Graphen der Schar f_a liegt.

(5 BE)

b) $f_1(x) = f_2(x)$

$f_1(x) = \frac{1}{1^3}x^3 - \frac{1}{1}x^2 + x \;=\; x^3 - x^2 + x$

$f_2(x) = \frac{1}{2^3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x \;=\; \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x$

Gleichsetzen:

$x^3 - x^2 + x = \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x \quad | -\frac{1}{8}x^3 \quad | +\frac{1}{2}x^2 \; -x$

$\frac{7}{8}x^3 - \frac{1}{2}x^2 = 0 \quad | \; x^2$ ausklammern

$x^2\left(\frac{7}{8}x - \frac{1}{2}\right) = 0$

$\Rightarrow x_{1,2} = 0$ Doppelte Nullstelle

$\frac{7}{8}x - \frac{1}{2} = 0 \quad | +\frac{1}{2}$

$\frac{7}{8}x = \frac{1}{2} \quad | : \frac{7}{8}$

$x = \frac{4}{7}$

x-Werte in f_1 oder f_2 einsetzen: $f_1(0) = 0^3 - 0^2 + 0 = 0$

$f_1\left(\frac{4}{7}\right) = \left(\frac{4}{7}\right)^3 - \left(\frac{4}{7}\right)^2 + \frac{4}{7} = \frac{148}{343}$

$S_1(0|0)$, $S_2\left(\frac{4}{7} \middle| \frac{148}{343}\right)$

Da f_1 und f_2 nur 2 gemeinsame Punkte haben, muss einer der beiden Punkte auf allen Graphen f_a liegen.

$f_a(0) = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}^+$.

$f_3\left(\frac{4}{7}\right) = \frac{1}{3^3}\cdot\left(\frac{4}{7}\right)^3 - \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{4}{7}\right)^2 + \left(\frac{4}{7}\right)$

$= \frac{4348}{9261}$

$\neq f_1\left(\frac{4}{7}\right)$

c) Der Graph jeder Funktion f_a hat genau einen Wendepunkt.

Bestimmen Sie den Wert von a zu dem Wendepunkt mit der größten y-Koordinate. **(5 BE)**

c) $f_a(x) = \frac{1}{a^3} x^3 - \frac{1}{a} x^2 + x$

$f_a'(x) = \frac{3}{a^3} x^2 - \frac{2}{a} x + 1$

$f_a''(x) = \frac{6}{a^3} x - \frac{2}{a}$

$\frac{6}{a^3} x - \frac{2}{a} = 0 \quad \mid + \frac{2}{a}$

$\frac{6}{a^3} x = \frac{2}{a} \quad \mid : \frac{6}{a^3}$

$x = \frac{2a^3}{6a}$

$x = \frac{a^2}{3}$

$f_a\left(\frac{a^2}{3}\right) = \frac{1}{a^3} \cdot \left(\frac{a^2}{3}\right)^3 - \frac{1}{a} \cdot \left(\frac{a^2}{3}\right)^2 + \frac{a^2}{3}$

$= \frac{1}{a^3} \cdot \frac{a^6}{27} - \frac{1}{a} \cdot \frac{a^4}{9} + \frac{a^2}{3}$

$= \frac{a^3}{27} - \frac{a^3}{9} + \frac{a^2}{3}$

$= \frac{a^3}{27} - \frac{3a^3}{27} + \frac{9a^2}{27}$

$= \frac{-2a^3 + 9a^2}{27}$ → Wertetabelle

⇒ für $a = 3$ max. y-Wert   a muss positiv sein, da $a \in \mathbb{R}^+$

d) Im Folgenden gilt $0 < a < 4$.

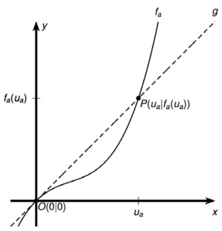

Abbildung 6.6

Abbildung 6.6 zeigt beispielhaft den Graphen einer Funktion f_a sowie die Gerade g mit $g(x) = x$, die den Graphen in den Punkten $O(0|0)$ und $P(u_a|f_a(u_a))$ schneidet. Die Gerade g, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = u_a$ begrenzen ein rechtwinkliges Dreieck.

Die folgenden Schritte stellen die Lösung einer Aufgabe dar:

1) $f_a(x) = g(x)$

$\Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \vee x = a^2$

2) $\frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot f_a(a^2) = 3 \cdot \int_0^{a^2} (x - f_a(x))\, dx$

$\Leftrightarrow \quad a = 2$

Erläutern Sie diese Schritte und **interpretieren** Sie die Lösung $a = 2$ geometrisch. **(5 BE)**

Es werden zuerst die Schnittstellen der Gerade g und f_a berechnet. Die Lösungen sind x = 0 und auch x = a^2. Für a = 2 besitzt das entstandene, rechtwinklige Dreieck exakt einen dreifachen Flächeninhalt von dem Inhalt, der von beiden Funktionsgraphen eingeschlossen wird.

Die originale Prüfungsaufgabe aus dem Hamburger Mathe Abitur findest du hier:
https://bildungsserver.hamburg.de/resource/blob/999842/d3f64f3f8ba126e2403977036cbcf932/abitur-mathematik-beispiel-aufgaben-2025-data.pdf