

IlirsMatheAbiVorbereitung

Aufgabe 5

Lineare Algebra mit dem ClassPad



Lineare Algebra

Aufgabe 8. Lineare Algebra

Lösung S. 119

Bei einer Insektenart verläuft die Entwicklung eines Insekts in vier Stadien: Aus einem Ei entwickelt sich über ein erstes und ein zweites Larvenstadium ein ausgewachsenes Insekt. Die Zusammensetzung einer Population dieser Insektenart kann durch Vektoren $\vec{v}_n$ der Form

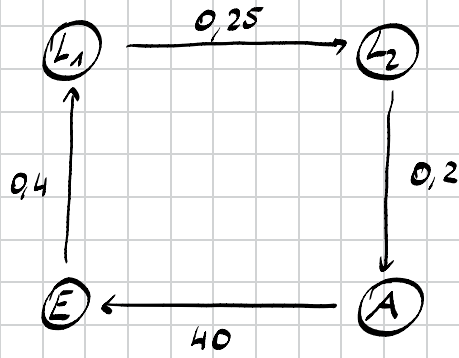
$$\vec{v}_n = \begin{pmatrix} E \\ L_1 \\ L_2 \\ A \end{pmatrix}$$

dargestellt werden, wobei E die Anzahl der Eier, L_1 die Anzahl der Larven des ersten Larvenstadiums, L_2 die Anzahl der Larven des zweiten Larvenstadiums und A die Anzahl der ausgewachsenen Insekten ist. Die Entwicklung einer solchen Population von einer Woche n zur nächsten wird modellhaft durch die Gleichung $\vec{v}_{n+1} = M \cdot \vec{v}_n$ mit

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 40 \\ 0,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0 \end{pmatrix}$$

beschrieben.

- a) Stellen Sie die beschriebene Entwicklung der Population in einem Übergangsdiagramm dar. (3 BE)



- b) Unter den Larven des ersten Larvenstadiums gibt es solche, die das zweite Larvenstadium nicht erreichen.

Geben Sie deren prozentualen Anteil unter allen Larven des ersten Larvenstadiums an und begründen Sie Ihre Angabe. (2 BE)

- b) Der Eintrag 0,25 in der zweiten Spalte von M gibt an, dass sich 25 % der Larven des ersten Larvenstadiums von einer Woche zur nächsten zu Larven des zweiten Larvenstadiums entwickeln. Damit beträgt der gesuchte Anteil 75 %.

Zu Beginn der Beobachtung beträgt die Größe der Population, d. h. die Summe der Anzahlen der Eier, Larven und ausgewachsenen Insekten, 8 500. Zwei Wochen nach Beobachtungsbeginn wird die Zusammensetzung der Population durch

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 16\,000 \\ 24\,000 \\ 200 \\ 150 \end{pmatrix}$$

dargestellt.

- c) Bestimmen Sie, die Größe der Population vier Wochen nach Beobachtungsbeginn. (2 BE)

$$M^2 \cdot \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 40 \\ 0,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 16\,000 \\ 24\,000 \\ 200 \\ 150 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 40 \\ 0,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6000 \\ 6400 \\ 6000 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1600 \\ 2400 \\ 1600 \\ 1200 \end{pmatrix}$$

$$1600 + 2400 + 1600 + 1200 = \underline{\underline{6800}}$$

Die originale Prüfungsaufgabe aus dem Hamburger Mathe Abitur findest du hier:

<https://bildungsserver.hamburg.de/resource/blob/999842/d3f64f3f8ba126e2403977036cbcf932/abitur-mathematik-beispiel-aufgaben-2025-data.pdf>

- d) Die Größe der Population reduziert sich im Abstand von vier Wochen jeweils um denselben Faktor.

Bestimmen Sie einen Term, mit dem die Größe der Population ausgehend vom Beobachtungsbeginn für Zeitpunkte im Abstand von jeweils vier Wochen berechnet werden kann.

(3 BE)

$$t \in \{0, 4, 8, 12, \dots\}$$

$$f(t) = 8500 \cdot r^t$$

Anfangspopulation

Faktor der Reduzierung mit $0 < r < 1$

$$f(4) = 8500 \cdot r^4 = 6800 \quad | : 8500$$

$$r^4 = \frac{4}{5} \quad | \sqrt[4]{}$$

$$r \approx 0,95$$

$$f(t) = 8500 \cdot 0,95^t$$

- e) Um das Überleben der Population zu sichern, werden Maßnahmen ergriffen, die ausschließlich die Überlebensraten der Larven beeinflussen.

Untersuchen Sie, wie groß die Überlebensrate y der Larven des zweiten Larvenstadiums in Abhängigkeit von der Überlebensrate x der Larven des ersten Larvenstadiums sein müsste, damit sich die Größe der Population dauerhaft im Abstand von jeweils vier Wochen wiederholt.

Geben Sie für diesen Fall alle möglichen Werte von y an.

(5 BE)

Neue Matrix N :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 40 \\ 0,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 \end{pmatrix}, \quad N^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 40 \\ 0,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 16xy & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16xy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16xy \end{pmatrix}$$

$$N^4 \cdot \begin{pmatrix} E \\ L_1 \\ L_2 \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ L_1 \\ L_2 \\ A \end{pmatrix} \Rightarrow 16xy = 1 \quad | : 16x$$

$$y = \frac{1}{16x}$$

$$x, y \in (0, 1]$$

$$\text{Für } x=1 \text{ gilt } y = \frac{1}{16x} = \frac{1}{16 \cdot 1} = \frac{1}{16} \Rightarrow \frac{1}{16} \leq y \leq 1$$

Durch Multiplikation mit $x \in (0, 1]$

Kann der Nenner nur gleich bleiben für $x=1$ oder kleiner werden für $x \neq 1$.

Wenn Nenner aber kleiner, Bruch insgesamt größer!