# #IlirsMatheAbiVorbereitung

## Aufgabe 3

# Lineare Algebra 1.0

# Lineare Algebra

**Aufgabe 13. Lineare Algebra** **Lösung S. 130**

**1.** Betrachtet wird die Entwicklung einer Population von Tieren. Die Zusammensetzung der Population kann durch Vektoren $\vec{v_n}$ der Form

$$\vec{v_n} = \begin{pmatrix} J \\ M \\ A \end{pmatrix}$$

dargestellt werden, dabei ist $J$ die Anzahl der jungen Tiere (bis ein Jahr alt), $M$ die Anzahl der mittelalten Tiere (mehr als ein Jahr bis zwei Jahre alt) und $A$ die Anzahl der alten Tiere (mehr als zwei Jahre alt).
Die Entwicklung der Population von einem Jahr $n$ zum nächsten lässt sich für $k \geq 0$ modellhaft durch die Matrix

$$P \begin{array}{c} \\ J \\ M \\ A \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} J & M & A \end{array} \\ \begin{pmatrix} k & 0{,}4 & 0{,}05 \\ 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix} \end{array}$$

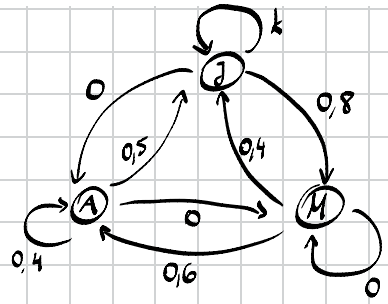
und die Gleichung

$$\overrightarrow{v_{n+1}} = P \cdot \vec{v_n}$$

beschreiben.

**a) Stellen** Sie die Entwicklung der Population in einem Übergangsdiagramm **dar**. **(3 BE)**

a)




**b)** Die Population besteht zu Beginn der Beobachtung ausschließlich aus 200 jungen Tieren. Zwei Jahre nach Beobachtungsbeginn beträgt die Anzahl der jungen Tiere 66.

**Ermitteln** Sie den Wert von $k$. **(4 BE)**

b) $\vec{v_2} = P^2 \cdot \begin{pmatrix} J \\ M \\ A \end{pmatrix} = P \cdot P \cdot \begin{pmatrix} J \\ M \\ A \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} k & 0{,}4 & 0{,}05 \\ 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 200 & 0 & 0 \end{array} \\ \begin{pmatrix} k & 0{,}4 & 0{,}05 \\ 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} 200 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 66 \\ M_2 \\ A_2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} k & 0{,}4 & 0{,}05 \\ 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 200k & 200 \cdot 0{,}8 & 0 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 200k \\ 200 \cdot 0{,}8 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} 66 \\ M_2 \\ A_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 200k^2 + 200 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}8 = 66$$

$$\Leftrightarrow 200k^2 + 64 = 66 \quad | -64$$

$$\Leftrightarrow 200k^2 = 2 \quad | :200$$

$$\Leftrightarrow k^2 = 0{,}01 \quad | \sqrt{\phantom{x}}$$

$$\Leftrightarrow k_{1,2} = \pm 0{,}1$$

Da $k > 0$ sein muss, ist $k = 0{,}1$.

**c)** Die Entwicklung einer anderen Population der oben beschriebenen Tierart kann von einem Jahr $n$ zum nächsten mithilfe der Matrix

$$Q = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}7 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}7 \end{pmatrix}$$

beschrieben werden. Für diese Entwicklung gilt:

*Die Größe der Gesamtpopulation sinkt von einem Jahr zum nächsten um 10 %.*

**Bestimmen** Sie, wie viele Jahre nach Beobachtungsbeginn die Größe der Population, d. h. die Summe der Anzahlen der Tiere jeden Alters, erstmals auf unter 20 % ihres Werts zu Beobachtungsbeginn gesunken ist. **(5 BE)**

c) Sei $G_n$ die Größe der Population nach $n$ Jahren. Dann gilt:

$G_{n+1} = 0{,}9 \cdot G_n$

Außerdem: $G_n = 0{,}9^n \cdot G_0$

$0{,}9^n \cdot G_0 \overset{!}{<} 0{,}2 \cdot G_0 \quad | : G_0$

$0{,}9^n < 0{,}2 \quad | \ln$

$\ln(0{,}9^n) < \ln(0{,}2)$

$n \cdot \ln(0{,}9) < \ln(0{,}2) \quad | : \ln(0{,}9)$ Achtung: $\ln(0{,}9)$ ist negativ, also tauscht sich die Ungleichung!

$n > \frac{\ln(0{,}2)}{\ln(0{,}9)}$

$n \approx 15{,}28 \Rightarrow$ nach 16 Jahren.

Die originale Prüfungsaufgabe aus dem Hamburger Mathe Abitur findest du hier:
https://bildungsserver.hamburg.de/resource/blob/999842/d3f64f3f8ba126e2403977036cbcf932/abitur-mathematik-beispiel-aufgaben-2025-data.pdf