

75

6

Einsatzmöglichkeiten  
des ClassPad in der  
Qualifikationsphase

8



3

CASIO®



# Einsatzmöglichkeiten des ClassPad in der Qualifikationsphase

Dr. Jens Weitendorf  
1. Auflage Mai 2025

---

# Einleitung

---

Im Land Nordrhein-Westfalen ist der Einsatz eines CAS-Rechners demnächst in der Sek. II verpflichtend. Dieser Band für die Qualifikationsphase setzt die vorherigen Bände fort. Welche Möglichkeiten sich für einen solchen Einsatz von ClassPads der Firma Casio ergeben, soll im Folgenden für die Qualifikationsphase dargestellt werden. Dabei geht es nicht darum, den ClassPad in jeder Unterrichtsstunde einzusetzen; sondern immer dann, wenn es unter mathematischen und didaktischen Gesichtspunkten sinnvoll erscheint.

Der Lehrplan sieht eine Trennung in die 3 Stoffgebiete Analysis, Lineare Algebra und Stochastik vor. Mit den hier vorliegenden Hinweisen beziehen wir uns ebenfalls auf diese 3 Gebiete. Den Leserinnen und Lesern wird auffallen, dass die Umfänge der drei Gebiete unterschiedlich sind. Dies hängt zum einen mit den Möglichkeiten des ClassPad, zum anderen aber auch mit den Inhalten des Lehrplans zusammen, die tlw. darauf abzielen, dass die Schülerinnen und Schüler Hilfsmittel frei arbeiten sollen. Des Weiteren haben wir uns auf Inhalte beschränkt, bei denen es sinnvoll erscheint, den ClassPad einzusetzen.

Insbesondere in der Stochastik eröffnen sich neue Inhalte, da Simulationen durchgeführt werden können und man hinsichtlich der Binomialverteilung nicht mehr auf die durch die Tabellen vorgegebenen Werte angewiesen ist.

Die einzelnen Teile des Manuskripts sind tabellenartig aufgebaut. Man findet zunächst Hinweise auf den Lehrplan, die aus diesem direkt übertragen sind, daneben Abbildungen des ClassPad. In der dritten und vierten Spalte gibt es dann technische und didaktische Hinweise. Bzgl. der beiden letzten Kategorien kann es zu Überschneidungen kommen, da einige technische Hinweise einen Zusammenhang zum Verständnis des Rechners haben. Ein solcher Rechner ist nach den Gesetzen der Logik programmiert und insofern weist die Bedienung auch Bezüge zur Mathematik auf.

Diese in Tabellen gefasste Information ist für die unterrichtenden Kolleginnen und Kollegen gedacht. Die technischen Hinweise sind so gestaltet, dass es auch für Einsteigerinnen und Einsteiger ohne Probleme möglich sein sollte, den ClassPad im Unterricht einzusetzen. Insbesondere werden die Inhalte der vorausgegangenen Bände nicht vorausgesetzt. Das Gleiche gilt für die Reihenfolge der einzelnen Gebiete. Diese sind in der Regel unabhängig davon behandelbar. Die dadurch entstehenden Wiederholungen werden in Kauf genommen. Aber auch CAS erfahrener Kolleginnen und Kollegen werden sicher die eine oder andere Idee für den Einsatz finden.

---

Im Anschluss an jedes Kapitel sind Arbeitsblätter für die Schülerinnen und Schüler zu finden, die direkt einsetzbar sind. Lösungen sind in der Regel nicht angegeben, da sich die Arbeitsblätter oft direkt auf die im Lehrerteil dargestellten Inhalte beziehen, und sie sich daraus direkt ergeben. Bei einigen Aufgaben wird der Rechner nur zur Kontrolle genutzt, so dass sich auch hier Lösungsblätter erübrigen.

Die Arbeitsblätter sind so gestaltet, dass sie entdeckendes Lernen ermöglichen. Ansonsten sollten die Kolleginnen und Kollegen jeweils entscheiden, welche Lösungen händisch und welche mithilfe des ClassPad erstellt werden sollen. In der Regel haben wir uns eher auf das rein Mathematische beschränkt und auf Realitätsbezüge verzichtet, es sei denn, es besteht ein direkter Zusammenhang zum Einsatz des ClassPads. Auch ist uns bewusst, dass die Realitätsbezüge nicht immer die Realität wirklich wiedergeben. Ansonsten sollten wünschenswerte Realitätsbezüge im Unterricht hinzugefügt werden. Inwieweit diese verständnis- bzw. motivationsfördernd sind, hängt natürlich immer von der Zusammensetzung der jeweiligen Lerngruppe ab.

Die Umfänge der Arbeitsblätter sind unterschiedlich, da bedingt durch den Lehrplan die Möglichkeiten für den sinnvollen Einsatz des ClassPads eingeschränkt sind. Es ist immer machbar, den ClassPad für Termumformungen und Berechnungen einzusetzen. So können die Schülerinnen und Schüler in jedem Fall ihre Ergebnisse überprüfen lassen.

**Ich danke Antonius Warmeling und dem Casio Education Team für die tatkräftige Unterstützung.**

Dr. Jens Weitendorf

---

# Inhaltsverzeichnis

---

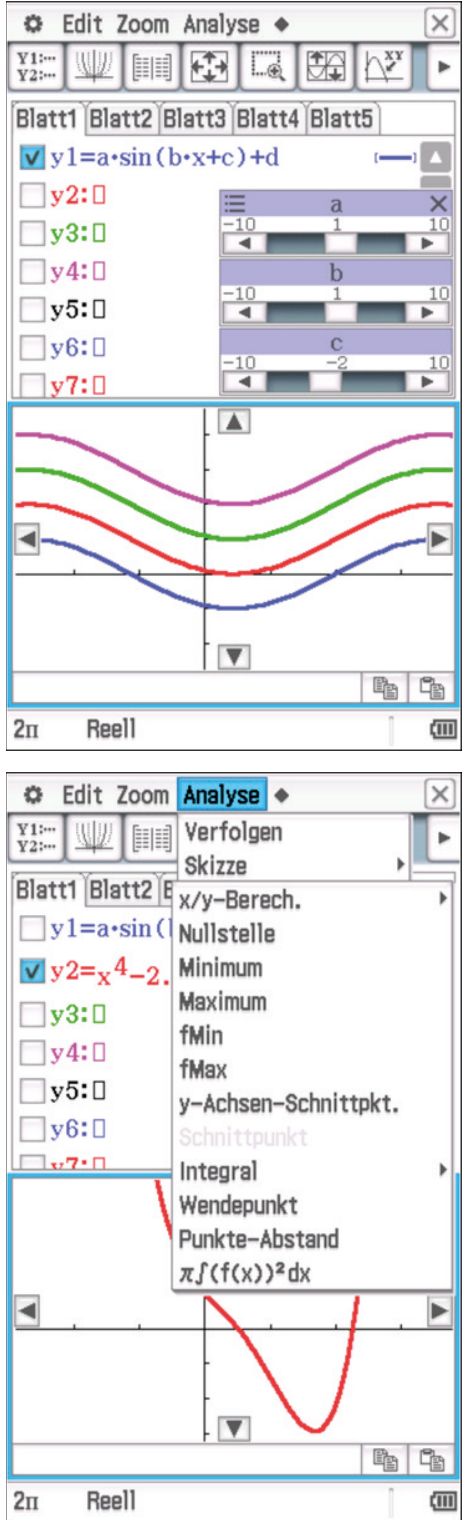
<b>Analysis</b>	<b>7</b>
Funktionen und Analysis	7
Ableitungsregeln und Krümmung von Funktionsgraphen	9
Eigenschaften einer biquadratischen und der entsprechenden quadratischen Funktion	15
Von Daten zu Funktionsgleichungen	19
Die Funktion $f(x) = e^x$	27
Ein Extremwertproblem	31
Optimierung bei der Sterilisation von Lebensmitteln	37
Umkehrfunktionen	39
Integralrechnung	43
Ein Beispiel zur Bedeutung der Integrationskonstanten	53
Beispiele zur Integration ausgehend von Daten in Tabellenform	55
Anhang: Ergänzung zum Text und Arbeitsblätter	63
<b>Lineare Algebra und Analytische Geometrie</b>	<b>71</b>
Ebenen und deren Gleichungen	71
Inzidenzprobleme	73
Das Skalarprodukt	77
Lagebeziehungen und Abstände	81

---

Arbeitsblatt zur Linearen Algebra und Analytischen Geometrie	85
<b>Stochastik</b>	<b>87</b>
Das Geburtstagsproblem	87
Simulationen mit Würfeln und Münzen	89
Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung	91
Die Binomialverteilung	97
Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung bzgl. der Binomialverteilung	107
Die Normalverteilung	111
Der Zusammenhang zwischen Normal- und Binomialverteilung	113
Abschätzung einer unbekanntes Wahrscheinlichkeit	121
Arbeitsblätter zur Stochastik	127

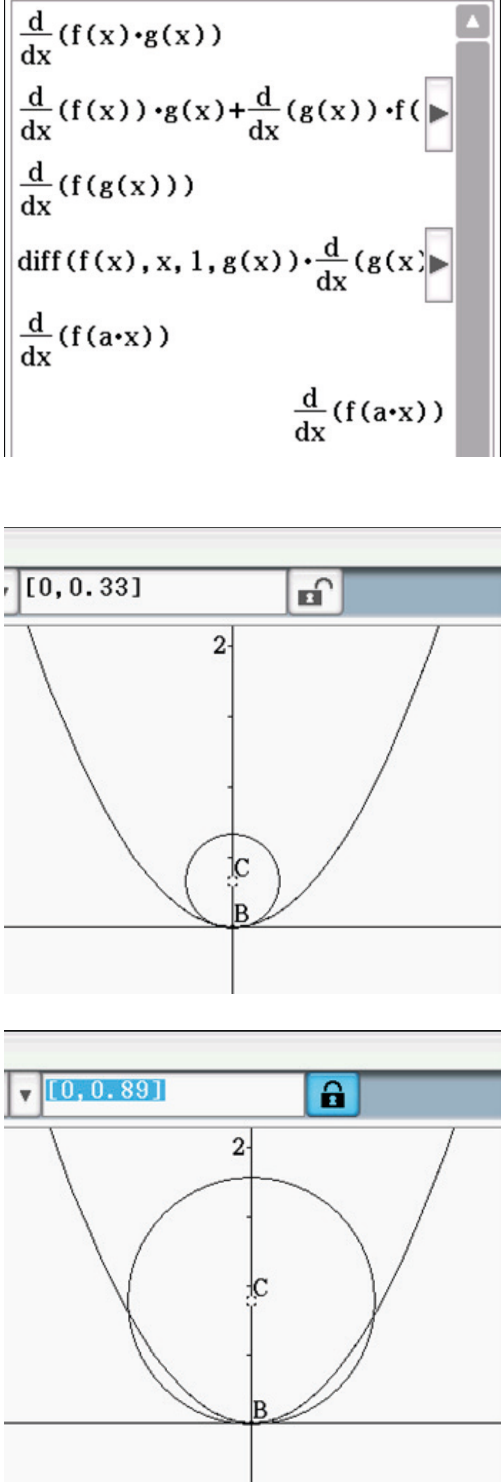
# Analysis

## Funktionen und Analysis

Bezug zum Lehrplan	Screenshot
<p>Inhaltliche Schwerpunkte:</p> <p>Funktionen: ganzrationale Funktionen, Exponentialfunktionen, nur LK: Sinusfunktionen  <math>f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d</math>  sowie entsprechende Kosinusfunktionen</p> <p>Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für <math>x \rightarrow \pm\infty</math></p> <p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <p>(19) lösen innermathematische und anwendungsbezogene Problemstellungen mithilfe von ganzrationalen Funktionen.</p>	 <p>The top screenshot shows a graphing calculator interface with a menu titled "Edit Zoom Analyse". A list of functions is visible, with the first function selected: <math>y_1 = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d</math>. Below the list, sliders for parameters <math>a</math>, <math>b</math>, and <math>c</math> are shown, with values 1, 1, and -2 respectively. The graph displays several sine waves in different colors (purple, green, red, blue). The bottom screenshot shows the same interface with the "Analyse" menu open, listing various analysis tools such as "Verfolgen", "Skizze", "x/y-Berech.", "Nullstelle", "Minimum", "Maximum", "fMin", "fMax", "y-Achsen-Schnittpkt.", "Schnittpunkt", "Integral", "Wendepunkt", "Punkte-Abstand", and <math>\pi \int (f(x))^2 dx</math>. The function <math>y_2 = x^4 - 2</math> is selected, and its graph is shown.</p>

Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
<p>Zur grafischen Darstellung des Grafen, wählt man den Bereich Grafik &amp; Tabelle. Falls im Grafikbereich noch ein Hintergrundbild zu sehen ist, muss man im Menü <i>Bildplot</i> wählen -&gt; <i>Datei</i> -&gt; <i>Neu</i> Es lassen sich nur maximal 3 Schieberegler benutzen. Die Variable d wurde durch:  <math>\{0, 1, 2, 3\} \Rightarrow d</math>  <math>\{0, 1, 2, 3\}</math>  als Liste definiert.</p> <p>Im Menü Bereich <i>Grafik</i> und <i>Tabelle</i> lassen sich einige Funktionseigenschaften direkt ablesen. Man findet diese unter <i>Analyse</i>.</p>	<p>Durch die Möglichkeit einen Funktionsgrafplotter zu benutzen, macht eine Kurvendiskussion auf die herkömmliche Art keinen Sinn. Man kann quasi das Pferd von hinten aufzäumen und die Schülerinnen und Schüler Grafen von Funktion zeichnen lassen und selbst einen Zusammenhang zu den Gleichungen herstellen zu lassen. Dabei können die im Lehrplan beschriebenen Eigenschaften von Funktionen von den Schülerinnen und Schülern eigenständig bearbeitet werden.</p> <p>In der Abbildung links wurde der Graf der Funktion <math>f(x) = x^4 - 2,4x^3 + x^2 - 2x + 1</math> erzeugt. Es zeigt sich, dass es mit dem ClassPad möglich ist, die typischen Punkte einer Kurvendiskussion abzuarbeiten. Die dafür erforderlichen Gleichungen werden im Hintergrund numerisch gelöst. Erstaunlich ist, dass im Lehrplan Extrema und Wendepunkte unerwähnt bleiben. Es kann sein, dass „Nullstellen“ sich auch auf die 1. und 2. Ableitung bezieht.</p>

# Ableitungsregeln und Krümmung von Funktionsgraphen

Bezug zum Lehrplan	Screenshot
<p>Inhaltliche Schwerpunkte: Fortführung der Differentialrechnung: Produktregel, Kettenregel (nur LK)</p> <p>Hinsichtlich der Krümmung von Funktionsgraphen findet sich nichts im Lehrplan.</p>	 <p>The screenshot shows a software interface with a list of mathematical formulas for differentiation. The formulas are:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><math>\frac{d}{dx} (f(x) \cdot g(x))</math></li> <li><math>\frac{d}{dx} (f(x)) \cdot g(x) + \frac{d}{dx} (g(x)) \cdot f(x)</math></li> <li><math>\frac{d}{dx} (f(g(x)))</math></li> <li><math>\text{diff}(f(x), x, 1, g(x)) \cdot \frac{d}{dx} (g(x))</math></li> <li><math>\frac{d}{dx} (f(a \cdot x))</math></li> <li><math>\frac{d}{dx} (f(a \cdot x))</math></li> </ul> <p>Below the list are two coordinate systems showing a parabola. The top graph shows a small circle at the vertex, labeled 'C' and 'B'. The bottom graph shows a larger circle at a higher point on the curve, also labeled 'C' and 'B'. The x-axis for both graphs is labeled with the interval [0, 0.33] and [0, 0.89] respectively.</p>

Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
<p>Man erhält die Ableitungsregeln, indem im Bereich <i>Interaktiv Berechnungen</i> -&gt; <i>diff</i> gewählt wird. Die Variable <math>x</math> wird automatisch gesetzt. Es ist darauf zu achten, dass die Variablen <math>f</math>, <math>g</math> und <math>a</math> nicht belegt sind. Dies ist im Variablenmanager (im Menü links oben neben <i>Edit</i>) zu überprüfen.</p> <p>Erstaunlich ist, dass die Funktion <math>f(a \cdot x)</math> im Gegensatz zu <math>f(g(x))</math> nicht abgeleitet wird. Dies liegt wahrscheinlich daran, dass die Variable „<math>a</math>“ auch für eine Funktion <math>a(x)</math> stehen könnte.</p> <p>Im Geometriebereich des ClassPad wird zunächst eine Normalparabel gezeichnet. Nun geht es darum, an die Parabel einen Kreis mit Mittelpunkt auf der <math>y</math>-Achse im Koordinatenursprung anzupassen. Dabei ist der Kreis so zu konstruieren, dass der Mittelpunkt auf der <math>y</math>-Achse und ein Randpunkt im Koordinatenursprung liegt. Der Mittelpunkt des Kreises ist so zu verschieben, dass der gesuchte Kreis und die Parabel nur diesen einen Punkt, den Koordinatenursprung gemeinsam haben. (Abb. links)</p> <p>Der Mittelpunkt <math>C</math> des Kreises (s. Abb. links oben)) muss also zum einen so verschoben werden, dass Kreis und Parabel nur den einen Punkt <math>B</math> gemeinsam haben, zum anderen müssen die beiden Kurven im Ursprung in ihren Krümmungen zunächst in anschaulicher Weise übereinstimmen, damit der Kreis sich optimal an die Parabel anschmiegt. Es dürfen keine weiteren Schnittpunkte entstehen. (s. Abb. links unten)</p>	<p>Das CAS des ClassPad bildet Ableitungen beliebiger Funktionen. Das heißt, Schülerinnen und Schüler können händisch durchgeführte Ableitungen mit dem Rechner überprüfen. Des Weiteren dient ein solcher Rechner als elektronische Formelsammlung (s. Abb. links). Für Schülerinnen und Schüler besteht dabei die Schwierigkeit, die Rechnerergebnisse zu interpretieren.</p> <p>Wie in Bezug auf den Lehrplan erwähnt, ist die Krümmung von Funktionsgraphen nicht Thema des Unterrichts. Bei Schülerinnen und Schülern gibt es aber oft die Meinung, dass die 2. Ableitung die Krümmung beschreibt; dies gilt aber nur qualitativ und nicht quantitativ. Wenn der ClassPad eingesetzt wird, besteht aber die Möglichkeit, dass die Schülerinnen und Schüler erfahren können, was Krümmung bedeutet.</p> <p>Für <math>y = f(x)</math> erhält man:</p> $K = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ <p>Der Radius für den Krümmungskreis ergibt sich dann zu <math>R = 1/K</math>.</p> <p>Wir bestimmen zunächst den Radius des Krümmungskreises für die Normalparabel im Koordinatenursprung. Schülerinnen und Schüler haben die Möglichkeit, ein Gefühl für die Bedeutung der Krümmung zu bekommen. Dazu muss der Radius so vergrößert werden, dass es gerade noch den einen gemeinsamen Punkt gibt. Man kann sich überlegen, dass die Funktion des optimalen Halbkreises im Punkt <math>(0/0)</math> mit der Funktion der Parabel und der ersten und zweiten Ableitung übereinstimmen muss.</p>

Bezug zum Lehrplan

Hinsichtlich der Krümmung von Funktionsgraphen findet sich nichts im Lehrplan.

Screenshot

Edit Aktion Interaktiv

0,5  $\frac{1}{2}$   $\int dx$   $\int dx^2$   $\int dx^3$   $\int dx^4$   $\int dx^5$   $\int dx^6$   $\int dx^7$   $\int dx^8$   $\int dx^9$   $\int dx^{10}$   $\int dx^{11}$   $\int dx^{12}$   $\int dx^{13}$   $\int dx^{14}$   $\int dx^{15}$   $\int dx^{16}$   $\int dx^{17}$   $\int dx^{18}$   $\int dx^{19}$   $\int dx^{20}$   $\int dx^{21}$   $\int dx^{22}$   $\int dx^{23}$   $\int dx^{24}$   $\int dx^{25}$   $\int dx^{26}$   $\int dx^{27}$   $\int dx^{28}$   $\int dx^{29}$   $\int dx^{30}$   $\int dx^{31}$   $\int dx^{32}$   $\int dx^{33}$   $\int dx^{34}$   $\int dx^{35}$   $\int dx^{36}$   $\int dx^{37}$   $\int dx^{38}$   $\int dx^{39}$   $\int dx^{40}$   $\int dx^{41}$   $\int dx^{42}$   $\int dx^{43}$   $\int dx^{44}$   $\int dx^{45}$   $\int dx^{46}$   $\int dx^{47}$   $\int dx^{48}$   $\int dx^{49}$   $\int dx^{50}$   $\int dx^{51}$   $\int dx^{52}$   $\int dx^{53}$   $\int dx^{54}$   $\int dx^{55}$   $\int dx^{56}$   $\int dx^{57}$   $\int dx^{58}$   $\int dx^{59}$   $\int dx^{60}$   $\int dx^{61}$   $\int dx^{62}$   $\int dx^{63}$   $\int dx^{64}$   $\int dx^{65}$   $\int dx^{66}$   $\int dx^{67}$   $\int dx^{68}$   $\int dx^{69}$   $\int dx^{70}$   $\int dx^{71}$   $\int dx^{72}$   $\int dx^{73}$   $\int dx^{74}$   $\int dx^{75}$   $\int dx^{76}$   $\int dx^{77}$   $\int dx^{78}$   $\int dx^{79}$   $\int dx^{80}$   $\int dx^{81}$   $\int dx^{82}$   $\int dx^{83}$   $\int dx^{84}$   $\int dx^{85}$   $\int dx^{86}$   $\int dx^{87}$   $\int dx^{88}$   $\int dx^{89}$   $\int dx^{90}$   $\int dx^{91}$   $\int dx^{92}$   $\int dx^{93}$   $\int dx^{94}$   $\int dx^{95}$   $\int dx^{96}$   $\int dx^{97}$   $\int dx^{98}$   $\int dx^{99}$   $\int dx^{100}$

```

define k(r, x)=r-√r^2-x^2
done
solve(x^2=k(0.5, x), x)
{x=0}
solve(x^2=k(0.51, x), x)
{x=0, x=-0.1414213562, x=0}
d^2(k(r, x)-x^2)
dx^2
-2·(x^2-r^2)^2-x^2·(-x^2+r^2)^0
(x^2-r^2)^2
define d2(r, x)=-2·(x^2-r^2)^2
done
    
```

Edit Zoom Analyse

Y1:  $\int dx$   $\int dx^2$   $\int dx^3$   $\int dx^4$   $\int dx^5$   $\int dx^6$   $\int dx^7$   $\int dx^8$   $\int dx^9$   $\int dx^{10}$   $\int dx^{11}$   $\int dx^{12}$   $\int dx^{13}$   $\int dx^{14}$   $\int dx^{15}$   $\int dx^{16}$   $\int dx^{17}$   $\int dx^{18}$   $\int dx^{19}$   $\int dx^{20}$   $\int dx^{21}$   $\int dx^{22}$   $\int dx^{23}$   $\int dx^{24}$   $\int dx^{25}$   $\int dx^{26}$   $\int dx^{27}$   $\int dx^{28}$   $\int dx^{29}$   $\int dx^{30}$   $\int dx^{31}$   $\int dx^{32}$   $\int dx^{33}$   $\int dx^{34}$   $\int dx^{35}$   $\int dx^{36}$   $\int dx^{37}$   $\int dx^{38}$   $\int dx^{39}$   $\int dx^{40}$   $\int dx^{41}$   $\int dx^{42}$   $\int dx^{43}$   $\int dx^{44}$   $\int dx^{45}$   $\int dx^{46}$   $\int dx^{47}$   $\int dx^{48}$   $\int dx^{49}$   $\int dx^{50}$   $\int dx^{51}$   $\int dx^{52}$   $\int dx^{53}$   $\int dx^{54}$   $\int dx^{55}$   $\int dx^{56}$   $\int dx^{57}$   $\int dx^{58}$   $\int dx^{59}$   $\int dx^{60}$   $\int dx^{61}$   $\int dx^{62}$   $\int dx^{63}$   $\int dx^{64}$   $\int dx^{65}$   $\int dx^{66}$   $\int dx^{67}$   $\int dx^{68}$   $\int dx^{69}$   $\int dx^{70}$   $\int dx^{71}$   $\int dx^{72}$   $\int dx^{73}$   $\int dx^{74}$   $\int dx^{75}$   $\int dx^{76}$   $\int dx^{77}$   $\int dx^{78}$   $\int dx^{79}$   $\int dx^{80}$   $\int dx^{81}$   $\int dx^{82}$   $\int dx^{83}$   $\int dx^{84}$   $\int dx^{85}$   $\int dx^{86}$   $\int dx^{87}$   $\int dx^{88}$   $\int dx^{89}$   $\int dx^{90}$   $\int dx^{91}$   $\int dx^{92}$   $\int dx^{93}$   $\int dx^{94}$   $\int dx^{95}$   $\int dx^{96}$   $\int dx^{97}$   $\int dx^{98}$   $\int dx^{99}$   $\int dx^{100}$

Blatt1 Blatt2 Blatt3 Blatt4 Blatt5

y21=d2(x, 0)  $\int dx$

y22:  $\int dx$

y23:  $\int dx$

y24:  $\int dx$

y25:  $\int dx$

y26:  $\int dx$

y27:  $\int dx$

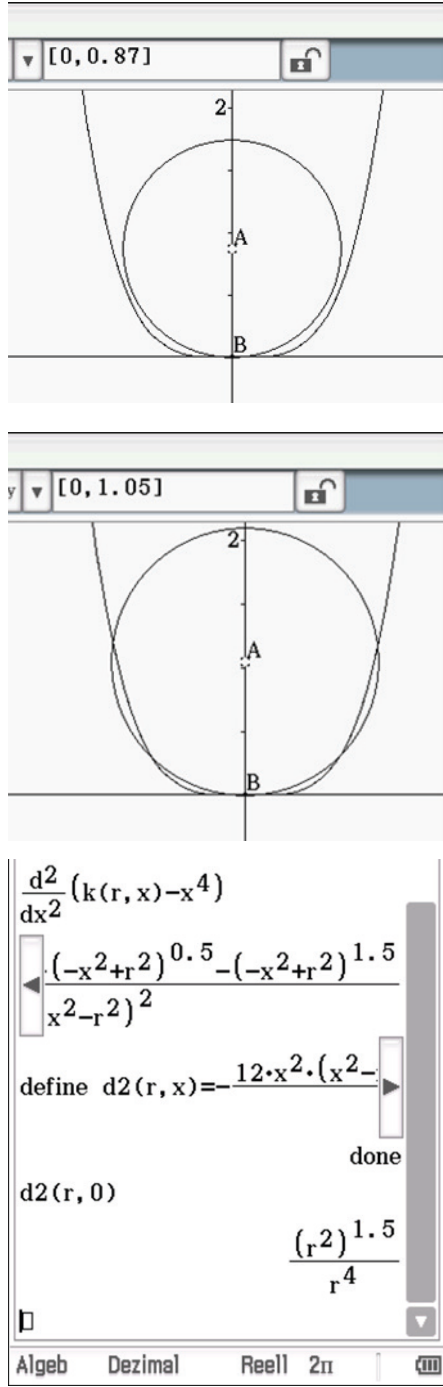
y21=d2(x, 0)

xc=0.5 yc=0

Nullstelle

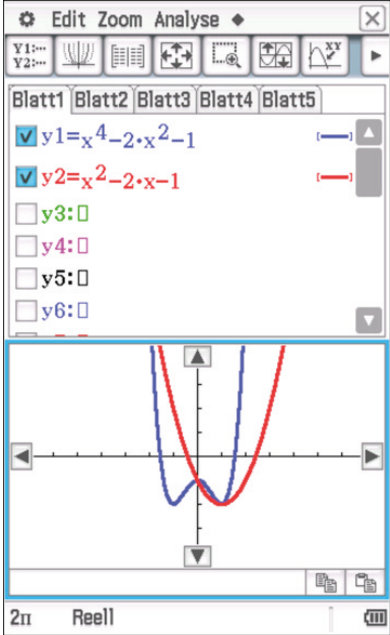
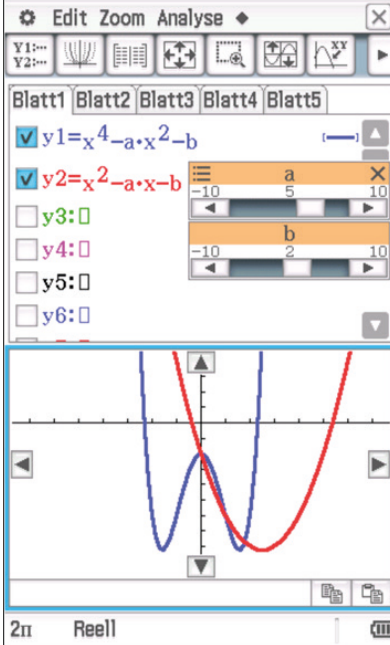
2π Reell

Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
<p>Es wird eine zweidimensionale Funktion definiert.</p> <p>Die 2. Ableitung kann direkt gebildet werden (Interaktiv -&gt; Berechnungen -&gt; diff -&gt; Ordnung: 2)...</p> <p>Um den Graphen dieser Funktion darzustellen, muss die Variable „r“ durch die Variable „x“ ersetzt werden. (Abb. links)</p>	<p>Aus der Abbildung links geht hervor, dass es für <math>x=0,5</math> genau eine Lösung und für <math>x=0,51</math> drei Lösungen gibt. Man könnte diesen Prozess weiter fortsetzen für <math>x=0,501</math> usw. Dies ist kein Beweis, sondern nur ein deutlicher Hinweis. Eine mathematisch korrekte Begründung ergibt sich aus dem obigen Ansatz.</p> <p>Im Folgenden wird die Differenzfunktion zwischen unterer Kreishälfte und Parabel definiert. Damit diese Funktion nur genau eine Nullstelle hat, muss die 2. Ableitung an der Stelle <math>x = 0</math> einen positiven Wert haben; die Differenzkurve hat dann eine Linkskrümmung. Deswegen wird die zweite Ableitung dieser Differenzfunktion gebildet und der Wert dieser zweiten Ableitung an der Stelle <math>x=0</math> (<math>d^2(r,0)</math>) bestimmt. Die Abbildung links zeigt die Abhängigkeit des Krümmungsverhaltens im Koordinatenursprung vom Radius des Kreises. Aus dieser Abbildung ist eindeutig zu erkennen, dass sich für <math>r=0,5</math> ein Vorzeichenwechsel der Differenzfunktion ergibt, woraus folgt, dass die Krümmung der Normalparabel im Scheitelpunkt den Wert <math>k=2</math> hat.</p> <p>Der oben beschriebene Weg zur Bestimmung des Krümmungsradius bietet Schülerinnen und Schülern vor allem durch die Unterstützung durch die dynamische Geometrie-Software die Möglichkeit, ein Verständnis für den Sachverhalt aufzubauen. Das CAS entlastet den Unterricht, da die formalen Umformungen, die in diesem Zusammenhang nicht zentral sind, nicht thematisiert werden müssen.</p>

Bezug zum Lehrplan	Screenshot
<p>Hinsichtlich der Krümmung von Funktionsgraphen findet sich nichts im Lehrplan</p>	 <p> <math display="block">\frac{d^2}{dx^2} (k(r, x) - x^4)</math> <math display="block">\frac{(-x^2 + r^2)^{0.5} - (-x^2 + r^2)^{1.5}}{(x^2 - r^2)^2}</math> <math display="block">\text{define } d2(r, x) = -\frac{12 \cdot x^2 \cdot (x^2 - r^2)}{(r^2)^{1.5} - r^4}</math> </p> <p>Algeb    Dezimal    Reell    2π</p>

Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
<p>Die Konstruktion entspricht der für die Parabel (s. Seite 6)</p>	<p>Die Funktionsgraphen von <math>f(x) = x^2</math> und <math>f(x) = x^4</math> haben eine gewisse Ähnlichkeit. Sie unterscheiden sich aber grundlegend hinsichtlich der Krümmung im Koordinatenursprung. Durch Ziehen am Punkt A und der damit verbundenen Vergrößerung des Radius gelingt es nicht, den Kreis optimal anzunähern.</p> <p>Aus den Berechnungen ist zu erkennen, dass es in diesem Fall keine Lösung geben kann (s. Abb. links). Daraus folgt, dass der Graf der Funktion <math>f(x) = x^4</math> im Koordinatenursprung im Gegensatz zur Normalparabel keine Krümmung hat.</p> <p>Aus dem Ansatz, dass die Funktionsgraphen mit der Kreisfunktion an der betreffenden Stelle und die beiden ersten Ableitungen übereinstimmen müssen, lässt sich die allgemeine Formel für die Krümmung herleiten. Da die Terme sehr komplex und im Screenshot schwer darstellbar sind, findet man die Herleitung im Anhang.</p>

# Eigenschaften einer biquadratischen und der entsprechenden quadratischen Funktion

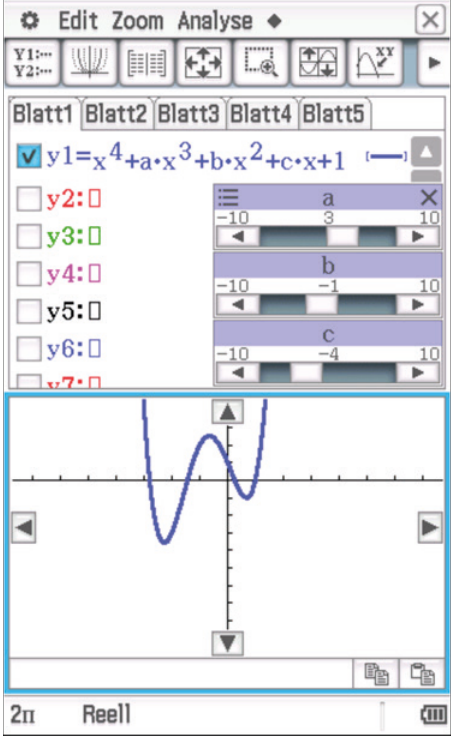
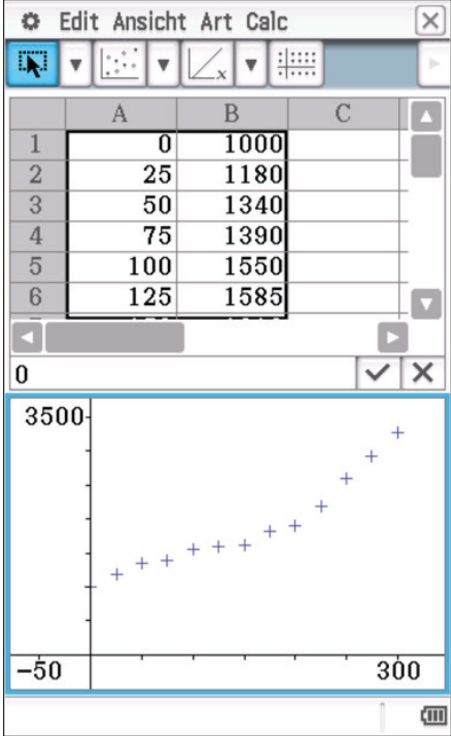
Bezug zum Lehrplan	Screenshot
<p>Inhaltliche Schwerpunkte: Funktionen: ganzrationale Funktionen</p> <p>Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für <math>x \rightarrow \pm\infty</math></p> <p>Die Schülerinnen und Schüler (1) lösen biquadratische Gleichungen auch ohne Hilfsmittel (nur LK)</p>	 <pre data-bbox="852 1151 1243 1330"> solve(x^4 - 2x^2 - 1 = 0, x)       {x = -sqrt(sqrt(2)+1), x = sqrt(sqrt(2)+1)} solve(x^2 - 2x - 1 = 0, x)       {x = -sqrt(2)+1, x = sqrt(2)+1}           </pre>
<p>(5) interpretieren Parameter von Funktionen im Kontext der Fragestellung und untersuchen ihren Einfluss auf Eigenschaften von Funktionsscharen</p>	

Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
<p>Um den Zusammenhang zwischen den Lösungen leichter zu erkennen, ist es erforderlich, dass im <i>Grundformat</i> nicht <i>Dezimalzahlen</i> markiert sind.</p>	<p>Das händische Lösen biquadratischer Gleichungen ist nur erforderlich, wenn keine digitalen Hilfsmittel zur Verfügung stehen.</p> <p>Der Einsatz digitaler Medien bietet auf der anderen Seite die Möglichkeit, den Zusammenhang zwischen einer biquadratischen und der entsprechenden quadratischen Funktion genauer zu untersuchen. Die Abbildung links lässt die Schülerinnen und Schüler vermuten, dass das lokale Maximum der biquadratischen Funktion grundsätzlich auf der y-Achse liegt und ein gemeinsamer Punkt mit dem Grafen der quadratischen Funktion ist. Dies lässt sich leicht mit Hilfe von Symmetrieeigenschaften begründen. Des Weiteren könnte man vermuten, dass der Scheitelpunkt der quadratischen Funktion mit einem Minimum der biquadratischen zusammenfällt. Dieses ist offensichtlich nur für den y-Wert korrekt. Dass dies kein Beweis ist, sollte mit den Schülerinnen und Schülern diskutiert werden.</p> <p>Eine Begründung folgt unten.</p> <p>Der Einsatz von Schiebereglern für die Parameter bietet den Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit, eigenständig Eigenschaften von Funktionsgrafem zu entdecken und den Einfluss zu diskutieren.</p>

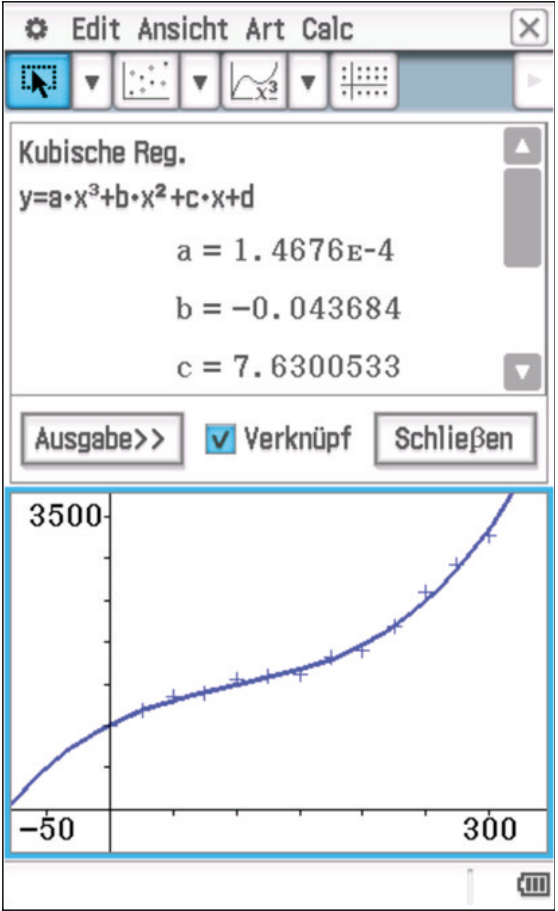
Bezug zum Lehrplan	Screenshot
<p>Inhaltliche Schwerpunkte: Funktionen: ganzrationale Funktionen</p> <p>Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalte für <math>x \rightarrow \pm\infty</math></p> <p>Die Schülerinnen und Schüler (1) lösen biquadratische Gleichungen auch ohne Hilfsmittel (nur LK)</p> <p>(5) interpretieren Parameter von Funktionen im Kontext der Fragestellung und untersuchen ihren Einfluss auf Eigenschaften von Funktionsscharen</p>	<pre> define f(a, x)=x<sup>4</sup>-a*x<sup>2</sup>-1 done define g(a, x)=x<sup>2</sup>-a*x-1 done d/dx (f(a, x)) 4*x<sup>3</sup>-2*a*x d/dx (g(a, x)) 2*x-a solve(4*x<sup>3</sup>-2*a*x=0, x) {x=0, x=-sqrt(2*a)/2, x=sqrt(2*a)/2} f(a, sqrt(2*a)/2) -a<sup>2</sup>/4-1 g(a, a/2) -a<sup>2</sup>/4-1  solve(x<sup>4</sup>+a*x<sup>2</sup>+b=0, x) {x=-sqrt(-2*(a+sqrt(a<sup>2</sup>-4*b)))/2, , x=sqrt(-2*(a+sqrt(a<sup>2</sup>-4*b)))/2, -sqrt(-2*(a-sqrt(a<sup>2</sup>-4*b)))/2, x=sqrt(-2*(a-sqrt(a<sup>2</sup>-4*b)))/2} </pre>



Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
<p data-bbox="217 521 735 678">Ein CAS unterscheidet nicht Parameter von unabhängigen Variablen. In den Definitionsgleichungen für die Funktionen sind diese gleichberechtigt. So könnten die Funktionen auch nach <math>a</math> abgeleitet werden.</p> <p data-bbox="217 1285 783 1379">Da nicht alle 4 Lösungen im Format gleichzeitig übertragen werden konnten, wurden diese nacheinander übertragen.</p>	<p data-bbox="810 331 1374 712">Der Beweis für die Gleichheit der <math>y</math>-Werte kann natürlich auch händisch geführt werden. Der Unterschied besteht dann in den Termumformungen. So ist prinzipiell zu entscheiden, welche Bedeutung Termumformungen für den Unterricht haben. Welche Schritte für die Begründung erforderlich sind, diese Überlegung muss auch bei Benutzung eines CAS entschieden werden. Warum für das absolute Glied kein Parameter gesetzt wurde, ist natürlich auch mit den Schülerinnen und Schülern zu besprechen.</p> <p data-bbox="810 1574 1374 1827">Wie schon oben erwähnt, ist ein CAS eine elektronische Formelsammlung. So lässt sich auch für biquadratische Gleichungen eine Lösungsformel direkt angeben. Von daher stellt sich eigentlich schon die Frage, welcher Mehrwert sich ergibt, wenn Schülerinnen und Schüler diese händisch lösen.</p>

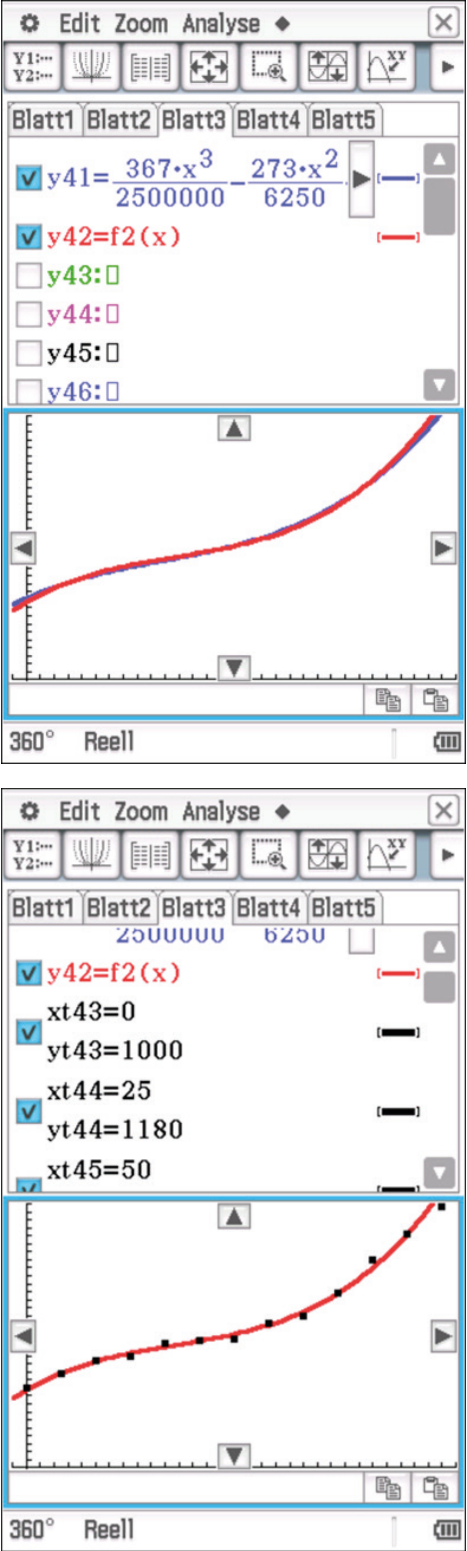
# Von Daten zu Funktionsgleichungen

Bezug zum Lehrplan	Screenshot
<p>Inhaltliche Schwerpunkte: Funktionen: ganzrationale Funktionen</p> <p>Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für <math>x \rightarrow \pm\infty</math></p> <p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <p>(5) interpretieren Parameter von Funktionen im Kontext der Fragestellung und untersuchen ihren Einfluss auf Eigenschaften von Funktionsscharen</p>	
<p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <p>(2) nutzen die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, der Sinusfunktion, der Kosinusfunktion, der Potenzfunktionen, <math>\sqrt{x}</math> und <math>1/x</math> sowie der Transformationen dieser Funktionen zur Beantwortung von Fragestellungen,</p> <p>(3) bestimmen Parameter einer Funktion mithilfe von Bedingungen, die sich aus dem Kontext ergeben,</p>	

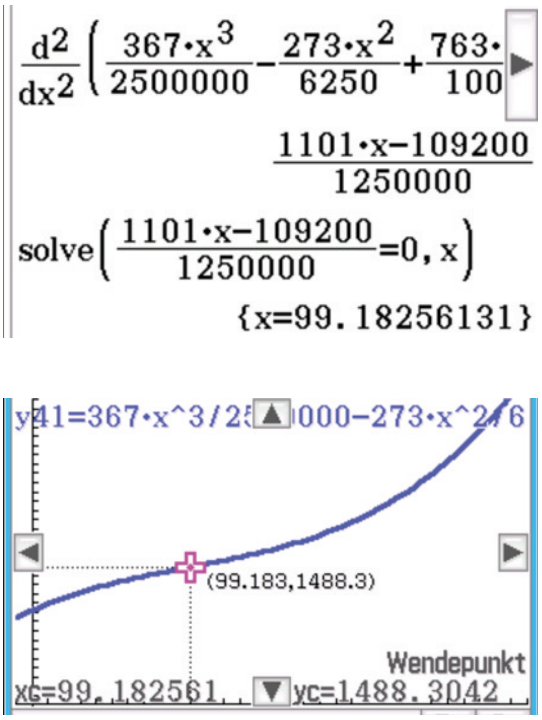
Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik																												
<p>Die Variablen a, b und c dürfen nicht belegt sein. Dies sollte man vorher im Variablenmanager überprüfen und ggf. löschen. Die Schieberegler werden durch die Wahl von  automatisch erzeugt. Voreingestellt sind diese auf einen Bereich von -10 bis 10 und einer Schrittweite von 1. Durch Betätigung von  lassen sich die Einstellungen anpassen.</p> <p>Um sich einen Überblick zu verschaffen, überträgt man die Werte in die Tabellenkalkulation. Für die grafische Darstellung ist  zu wählen. Eine Skalierung der Achsen geschieht automatisch.</p>	<p>Wie schon oben erwähnt, haben die Schülerinnen und Schüler durch die Eingabe rationaler Funktionen mit variablen Koeffizienten die Möglichkeit, Eigenschaften der Funktionsgraphen eigenständig zu erkunden und den Zusammenhang zu den Koeffizienten herzustellen. Das bedeutet eine Umkehrung von dem, was unter Kurvendiskussion verstanden wird. Ein Ziel solcher Kurvendiskussionen war ja, die Schülerinnen und Schüler in die Lage zu versetzen, eine möglichst genaue Skizze von Funktionsgraphen zu zeichnen. Da Funktionsplotter automatisch zur Verfügung stehen, macht dieses Ziel keinen Sinn mehr.</p> <p>Ein Unternehmen ermittelt folgende Kosten bezogen auf die jeweilige Produktionsmenge:</p> <table border="1" data-bbox="810 1066 1374 1630"> <thead> <tr> <th>Produktionsmenge</th> <th>Kosten</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>1000</td></tr> <tr><td>25</td><td>1180</td></tr> <tr><td>50</td><td>1340</td></tr> <tr><td>75</td><td>1390</td></tr> <tr><td>100</td><td>1550</td></tr> <tr><td>125</td><td>1585</td></tr> <tr><td>150</td><td>1610</td></tr> <tr><td>175</td><td>1810</td></tr> <tr><td>200</td><td>1890</td></tr> <tr><td>225</td><td>2180</td></tr> <tr><td>250</td><td>2590</td></tr> <tr><td>275</td><td>2920</td></tr> <tr><td>300</td><td>3270</td></tr> </tbody> </table> <p>Eine mögliche Fragestellung:</p> <p>Ermitteln Sie eine Kostenfunktion und bestimmen die Produktionsmenge, ab der die Kosten von einem degressiven (die Steigung nimmt ab) zu einem progressiven (die Steigung nimmt zu) Wachstum übergehen. Aus der Abbildung links ist abzulesen, dass man eine Funktion dritten Grades als Ansatz wählen kann.</p>	Produktionsmenge	Kosten	0	1000	25	1180	50	1340	75	1390	100	1550	125	1585	150	1610	175	1810	200	1890	225	2180	250	2590	275	2920	300	3270
Produktionsmenge	Kosten																												
0	1000																												
25	1180																												
50	1340																												
75	1390																												
100	1550																												
125	1585																												
150	1610																												
175	1810																												
200	1890																												
225	2180																												
250	2590																												
275	2920																												
300	3270																												

Bezug zum Lehrplan	Screenshot
<p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <p>(1) führen Extremwertprobleme durch Kombination mit Nebenbedingungen auf Funktionen einer Variablen zurück und lösen diese,</p> <p>(2) nutzen die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, der Sinusfunktion, der Kosinusfunktion, der Potenzfunktionen, <math>\sqrt{x}</math> und <math>\frac{1}{x}</math> sowie der Transformationen dieser Funktionen zur Beantwortung von Fragestellungen,</p> <p>(3) bestimmen Parameter einer Funktion mithilfe von Bedingungen, die sich aus dem Kontext ergeben,</p>	 <p> <math display="block">y = \frac{367 \cdot x^3}{2500000} - \frac{273 \cdot x^2}{6250} + \frac{763 \cdot x}{100} + 1018</math> </p> <p> <math display="block">\begin{cases} f(a, b, c, d, 25) = 1180 \\ f(a, b, c, d, 125) = 1585 \\ f(a, b, c, d, 225) = 2180 \\ f(a, b, c, d, 275) = 2920 \end{cases} \Big _{a, b, c}</math> </p> <p> <math>\{a = 1.98E-4, b = -0.06475, c = 9</math> </p> <p> <math>\text{define } f2(x) = 1.98E-4 * x^3 - 0.</math> </p> <p>done</p>

Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
<p>Die Regression wird durchgeführt, indem die ersten beiden Spalten markiert werden und: <i>Calc -&gt; Regression -&gt; kubische Regression</i> Für die grafische Darstellung ist  zu wählen.</p> <p>Wenn man die Gleichung der Regressionsfunktion in den Bereich <i>main</i> übertragen möchte, muss man den Grafen markieren und: <i>Edit -&gt; Kopieren -&gt;</i> in den Bereich <i>main</i> wechseln <i>-&gt; Einfügen</i></p> <p>Die Gleichung kann im aktiven Fenster nicht vollständig dargestellt werden; deswegen wurde das absolute Glied von Hand hinzugefügt.</p> <p>Um das Gleichungssystem übersichtlich zu halten, sollte die allgemeine kubische Funktion vorher definiert werden. Die Lösungen für die Koeffizienten sind den Variablen noch nicht zugeordnet. Dies kann mit dem Zuordnungspfeil  in der <i>Math1</i> Tastatur gemacht werden. Dies macht aber nur Sinn, wenn man mit den Koeffizienten noch weiterarbeiten will. Einfacher ist es, diese einfach mit markieren <i>-&gt; kopieren -&gt; einfügen</i> zu übertragen.</p>	<p>Auch wenn es nicht im Plan steht, bietet sich hier eine kubische Regression an. Im GK könnte man das als Black Box verstehen; während es im LK doch möglich sein sollte zumindest das Prinzip, wie Regressionen (immerhin handelt es sich ja dabei auch um die Lösung eines Extremwertproblems) berechnet werden, zu diskutieren. Für den GK kann man auch 4 Daten auswählen und damit eine Funktionsgleichung bestimmen (s. unten)</p> <p>Für die Durchführung der Berechnung ist es erforderlich, von einer allgemeinen Funktion 3. Grades auszugehen:  <math display="block">f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d</math> Dies ist eine Funktion der Art <math>f(a,b,c,d,x)</math> Für die weitere Berechnung ist</p> $g(a, b, c, d) = \sum_{i=1}^{13} (f(a, b, c, d, x_i) - y_i)^2$ zu bilden. Die Summation erfolgt über die 13 gegebenen Werte. Von der Funktion $g$ sind die partiellen Ableitungen nach $a$ , $b$ , $c$ und $d$ zu bilden und gleich null zu setzen. Man erhält ein Gleichungssystem von 4 Gleichungen mit den 4 Unbekannten. Die Lösung ergibt die Koeffizienten für die Regression. Da die Terme sehr lang sind, sind die Berechnungen mit dem ClassPad im Anhang zu finden. <p>Für den GK kann man auch 4 Daten auswählen und damit über ein Gleichungssystem eine Funktionsgleichung bestimmen (s. unten).</p>

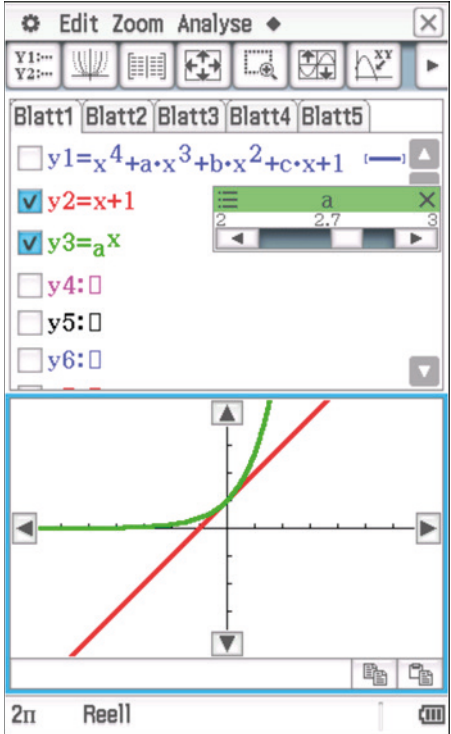
Bezug zum Lehrplan	Screenshot
<p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <p>(2) nutzen die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, der Sinusfunktion, der Kosinusfunktion, der Potenzfunktionen <math>a^x</math> und <math>\frac{1}{x}</math> sowie der Transformationen dieser Funktionen zur Beantwortung von Fragestellungen,</p> <p>(3) bestimmen Parameter einer Funktion mithilfe von Bedingungen, die sich aus dem Kontext ergeben,</p>	 <p>The top screenshot shows the function editor with the following content:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Y1: ...</li> <li>Y2: ...</li> <li>Blatt1 Blatt2 Blatt3 Blatt4 Blatt5</li> <li><input checked="" type="checkbox"/> <math>y_{41} = \frac{367 \cdot x^3 - 273 \cdot x^2}{2500000 - 6250}</math></li> <li><input checked="" type="checkbox"/> <math>y_{42} = f_2(x)</math></li> <li><input type="checkbox"/> <math>y_{43} = \square</math></li> <li><input type="checkbox"/> <math>y_{44} = \square</math></li> <li><input type="checkbox"/> <math>y_{45} = \square</math></li> <li><input type="checkbox"/> <math>y_{46} = \square</math></li> </ul> <p>The bottom screenshot shows the function editor with the following content:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Y1: ...</li> <li>Y2: ...</li> <li>Blatt1 Blatt2 Blatt3 Blatt4 Blatt5</li> <li><input checked="" type="checkbox"/> <math>y_{42} = f_2(x)</math></li> <li><input checked="" type="checkbox"/> <math>xt_{43} = 0</math></li> <li><input checked="" type="checkbox"/> <math>yt_{43} = 1000</math></li> <li><input checked="" type="checkbox"/> <math>xt_{44} = 25</math></li> <li><input checked="" type="checkbox"/> <math>yt_{44} = 1180</math></li> <li><input checked="" type="checkbox"/> <math>xt_{45} = 50</math></li> </ul>



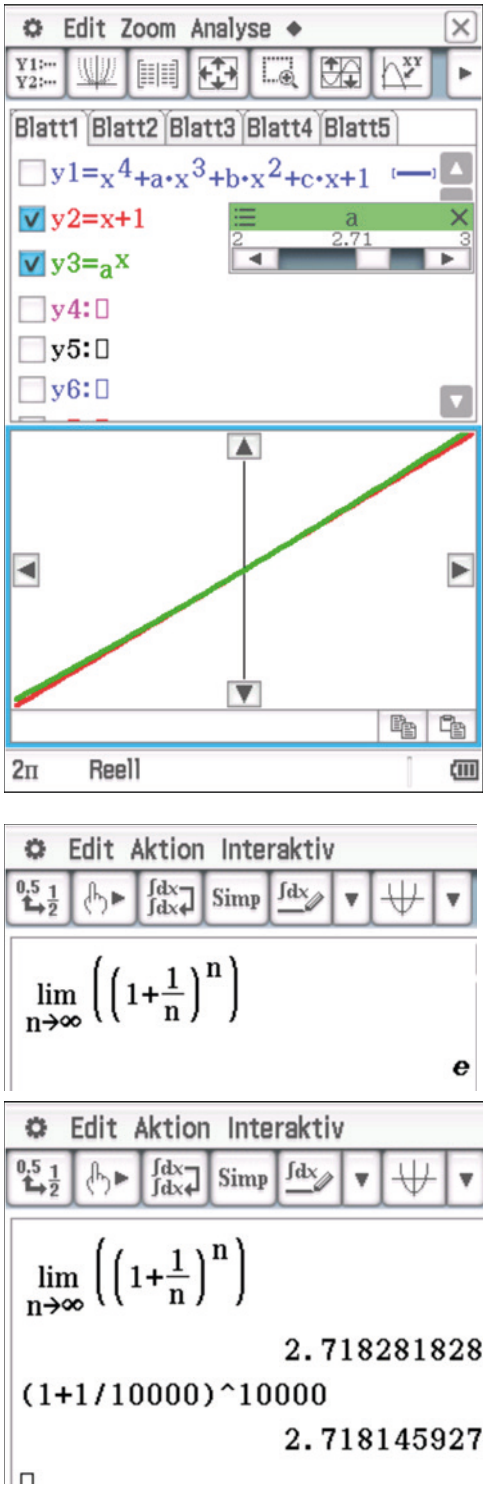
Bezug zum Lehrplan	Screenshot
<p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <p>(20) lösen innermathematische und anwendungsbezogene Problemstellungen mithilfe von ganzrationalen Funktionen, der natürlichen Exponentialfunktion und daraus zusammengesetzten Funktionen.</p>	 <p>The screenshot displays the second derivative of a function and its graph. The second derivative is shown as:</p> $\frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{367 \cdot x^3}{2500000} - \frac{273 \cdot x^2}{6250} + \frac{763 \cdot x}{100} \right) = \frac{1101 \cdot x - 109200}{1250000}$ <p>The software then solves the equation <math>\frac{1101 \cdot x - 109200}{1250000} = 0</math> for <math>x</math>, resulting in the solution set <math>\{x = 99.18256131\}</math>.</p> <p>Below the algebraic work, a graph of the function <math>y = 367 \cdot x^3 / 2500000 - 273 \cdot x^2 / 6250 + 763 \cdot x / 100</math> is shown. A pink cross marks the saddle point at <math>(99.183, 1488.3)</math>. The software also identifies the inflection point (Wendepunkt) with coordinates <math>x_G = 99.182561</math> and <math>y_G = 1488.3042</math>.</p>

Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
<p>Die 2. Ableitung lässt sich direkt berechnen.  <i>Interaktiv -&gt; Berechnungen -&gt; diff</i>  Als Ordnung ist dann natürlich 2 zu wählen</p> <p>Alternativ lässt sich der Wendepunkt auch im Bereich Grafik bestimmen.  Der Menüpunkt <i>Analyse</i> bietet dies.  Dies ist nur möglich, wenn nur ein Graf dargestellt ist.</p>	<p>Es bleibt, die Produktionsmenge zu bestimmen, ab der die Kosten von einem degressiven (die Steigung nimmt ab) zu einem progressiven (die Steigung nimmt zu) Wachstum übergehen, zu bestimmen.  Dazu ist der Wendepunkt der kubischen Funktion zu bestimmen.  Da man mit Näherungswerten gerechnet hat, sollte man das Ergebnis unbedingt mit den Schülerinnen und Schülern diskutieren.  Vergleicht man das Ergebnis mit den Tabellenwerten, würde man die gesuchte Produktionsmenge eher im Bereich von 125 vermuten.</p>

# Die Funktion $f(x)=e^x$

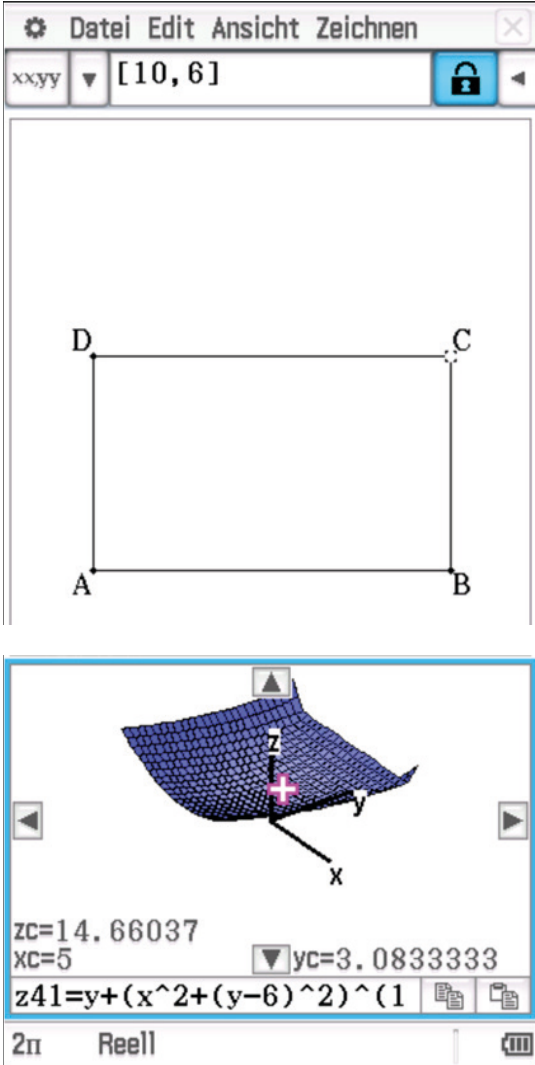
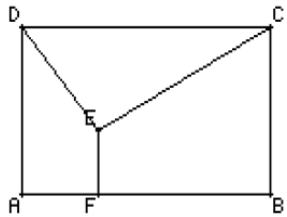
Bezug zum Lehrplan	Screenshot
<p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <p>(9) beschreiben die Eigenschaften von Exponentialfunktionen der Form <math>a^x</math> und erläutern die Besonderheit der natürlichen Exponentialfunktion (<math>f=e^x</math>)</p>	 <p>The screenshot shows a graphing calculator interface with a coordinate system. Three functions are plotted: a red line <math>y_2 = x + 1</math>, a green curve <math>y_3 = a^x</math>, and a grey curve <math>y_1 = x^4 + a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + 1</math>. The green curve passes through the point (1, 2.7). A small window shows the value of 'a' as 2.7. The interface includes a menu bar with 'Edit', 'Zoom', and 'Analyse', and a toolbar with various icons. The bottom of the window shows '2π' and 'Reell'.</p> $\text{solve} \left( \frac{a^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = 1, a \right)$ $\left\{ a = \left( \frac{1}{n} + 1 \right)^n \right\}$



Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
<p>Um diejenige Funktion zu finden, deren Ableitung an der Stelle <math>x = 0</math> den Wert 1 hat wird die Gerade <math>y=2</math> und die allgemeine Exponentialfunktion eingegeben. Mit Hilfe des Schiebereglers lässt sich die Basis verändern.</p> <p>Auch hier sollte vorher im Variablenmanager überprüft werden, ob die Variablen belegt sind.</p>	<p>Bzgl. der Exponentialfunktion: Für die Herleitung der Ableitung ist der Differenzenquotient zu betrachten:</p> $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h}$ <p>Daraus folgt für alle Exponentialfunktionen: <math>f'(x) \sim f(x)</math> Das heißt, man muss sich nur noch für den Grenzwert an der Stelle <math>x=0</math> interessieren. Gleichheit von Funktion und Ableitung ergibt sich, wenn der Grenzwert an der Stelle <math>x = 0</math> den Wert 1 hat. Gesucht ist die Basis <math>a</math>, für die gilt:</p> $\frac{a^h - 1}{h} \approx 1 \Rightarrow a^h \approx h + 1 \quad \frac{1}{n} \rightarrow h$ $\Rightarrow a^{\frac{1}{n}} \approx 1 + \frac{1}{n} \Rightarrow a \approx \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ <p>Bevor es an die Auswertung der obigen Folge geht, haben die Schülerinnen und Schüler die Möglichkeit, mit Variation des Schiebereglers (s. Abb. links) einen eher groben Näherungswert zu finden. Durch die Variation wird für die Schülerinnen und Schüler deutlich, dass es den gesuchten Wert <math>a</math> gibt. Es ist jeweils zu entscheiden, ob die Umformung mit dem ClassPad oder händisch durchgeführt wird.</p>

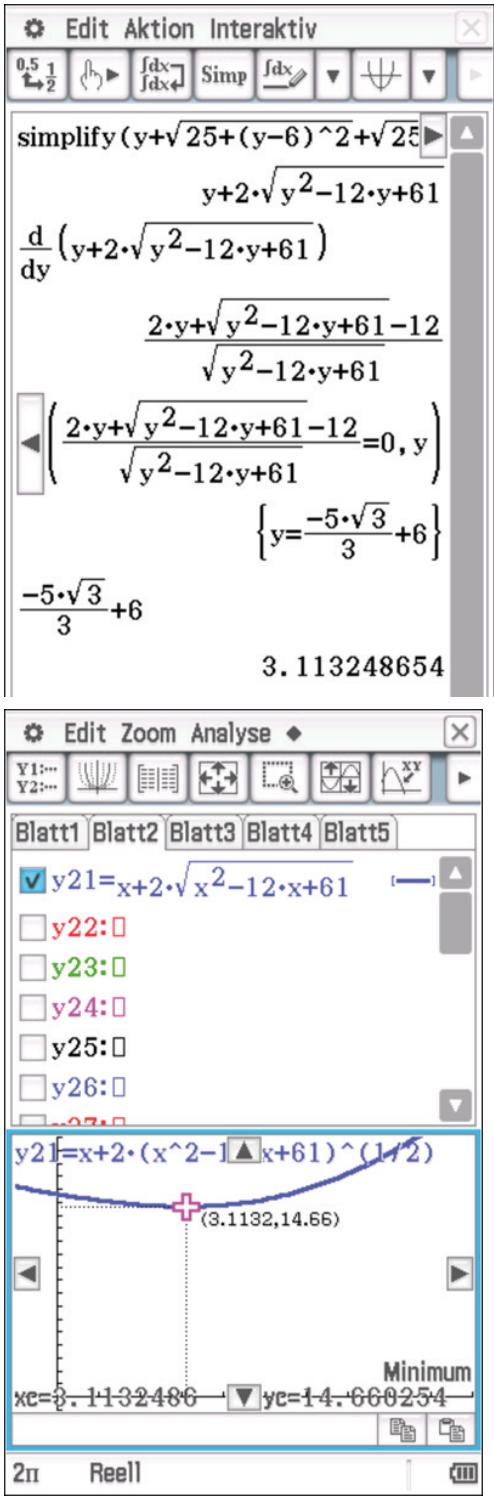
Bezug zum Lehrplan	Screenshot
<p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <p>(9) beschreiben die Eigenschaften von Exponentialfunktionen der Form <math>a^x</math> und erläutern die Besonderheit der natürlichen Exponentialfunktion (<math>f = e^x</math>)</p>	 <p>The screenshot shows a software interface with three main sections:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><b>Top Section:</b> A window titled "Edit Zoom Analyse" with a toolbar and a list of functions. The functions are: <ul style="list-style-type: none"> <li><input type="checkbox"/> <math>y1 = x^4 + a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + 1</math></li> <li><input checked="" type="checkbox"/> <math>y2 = x + 1</math></li> <li><input checked="" type="checkbox"/> <math>y3 = a^x</math></li> <li><input type="checkbox"/> <math>y4 = \square</math></li> <li><input type="checkbox"/> <math>y5 = \square</math></li> <li><input type="checkbox"/> <math>y6 = \square</math></li> </ul> A small window shows a slider for 'a' with a value of 2.71. Below is a graph showing a red line (<math>y2 = x + 1</math>) and a green curve (<math>y3 = a^x</math>) that is tangent to the red line at the point (2, 3). The x-axis is labeled "Reell".</li> <li><b>Middle Section:</b> A window titled "Edit Aktion Interaktiv" with a toolbar and the mathematical expression: <math display="block">\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right)</math> The result <math>e</math> is shown at the bottom right.</li> <li><b>Bottom Section:</b> Another window titled "Edit Aktion Interaktiv" with the same expression as above. Below it, two numerical approximations are shown: <math display="block">2.718281828</math> <math display="block">(1 + 1/10000)^{10000}</math> <math display="block">2.718145927</math> </li> </ul>



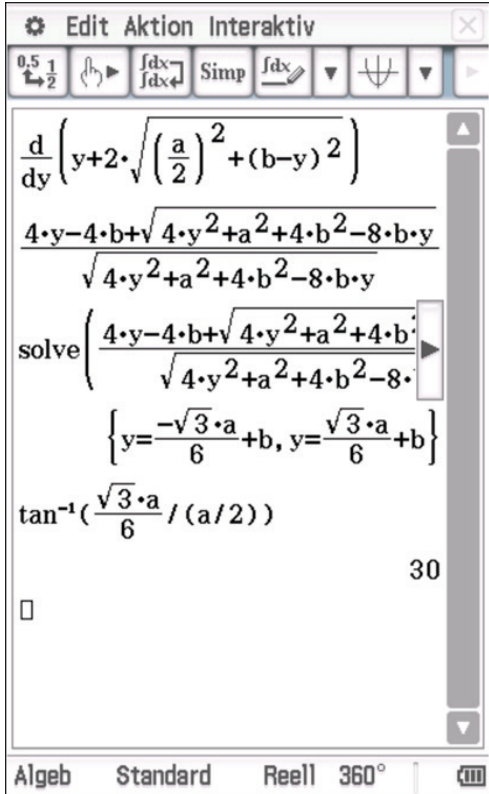
# Ein Extremwertproblem


Bezug zum Lehrplan	Screenshot
<p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <p>(1) führen Extremwertprobleme durch Kombination mit Nebenbedingungen auf Funktionen einer Variablen zurück und lösen diese</p> <p>(2) nutzen die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, der Sinusfunktion, der Kosinusfunktion, der Potenzfunktionen, <math>\sqrt{x}</math> und <math>\frac{1}{x}</math> sowie der Transformationen dieser Funktionen zur Beantwortung von Fragestellungen,</p> <p>(3) bestimmen Parameter einer Funktion mithilfe von Bedingungen, die sich aus dem Kontext ergeben,</p> <p>Zu (2) und (3): Zur Lösung des Problems werden Wurzelfunktionen von ganzrationalen Funktionen benötigt, die sich aus diesen aber mit Hilfe des Satzes von Pythagoras relativ einfach ergeben.</p>	 <p>The screenshot shows a software interface with a menu bar (Datei, Edit, Ansicht, Zeichnen) and a coordinate input field containing <math>[10, 6]</math>. The main window displays a rectangle with vertices labeled A, B, C, and D. Below this, a 3D plot shows a blue mesh surface in a coordinate system with x, y, and z axes. A red crosshair marks a point on the surface. Below the plot, numerical values are displayed: <math>zC=14.66037</math>, <math>xC=5</math>, and <math>yC=3.0833333</math>. A formula bar contains the equation <math>z=1+y+(x^2+(y-6)^2)^{0.5}</math>. At the bottom, the text "2π Reell" is visible.</p> <p>DE: 4.83 CE: 7.83 EF: 2.30 Summe=14.96</p>  <p>The diagram shows a rectangle ABCD with vertices A (bottom-left), B (bottom-right), C (top-right), and D (top-left). Point E is located on the bottom side AB, and point F is also on the bottom side AB, positioned to the left of E. Lines connect D to E and C to E, forming a shape with vertices D, C, E, F, A, B.</p>

Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
<p>Die Punkte A, B, C und D werden zunächst beliebig eingetragen. Wenn der jeweilige Punkt markiert wird, werden seine Koordinaten im Messfenster angezeigt. Dort lassen sie sich dann entsprechend verändern (z. B. Punkt C auf [10,6] s. Abb. links). Entsprechend lassen sich die Punkte A [0,0], B [10,0] und D [0,6] setzen. Die Strecken AB, BC usw. sind eigentlich nicht erforderlich.</p> <p>In der 3D-Grafik ist der Graf der 2-dimensionalen Funktion darstellbar. Dazu ist die Art  und der Bereich für die Darstellung  vorher einzustellen. Für den Bereich:  <math>-1 &lt; x &lt; 11, -1 &lt; y &lt; 7, 5 &lt; z &lt; 20</math>  Das Kreuz wird durch <i>Analyse</i> -&gt; <i>Verfolgen</i> erzeugt. Mit dem Cursor lässt dieses auf der Fläche bewegen.</p> <p>Der Punkt E wird beliebig in das Rechteck gesetzt. Von E wird eine Senkrechte zu AB konstruiert und der Schnittpunkt F gesetzt. Die Strecken EF, EC und ED werden gezeichnet. Die Längen lassen sich im Messfenster angeben und durch Markieren in den Zeichenbereich ziehen. Die Summe der drei Strecken lässt sich über <i>Zeichnen</i> -&gt; <i>Formelterm</i> bilden (@1+@2+@3). Die einzelnen Größen werden vorher entsprechend gekennzeichnet. Wenn man nun den Punkt E markiert und an ihm zieht, ändern sich die Werte automatisch.</p>	<p>Extremwertproblem: Abwasser  Zwei Orte, die 10 km voneinander entfernt liegen, sollen an eine zentrale Abwasserleitung angeschlossen werden. Diese verläuft in 6 km Entfernung parallel zur Verbindungslinie der beiden Orte. Aus Kostengründen ist nur ein einziger Anschluss an diese zentrale Leitung möglich.</p> <p>Um sich einen Überblick zu verschaffen, ist es hilfreich, zunächst eine Zeichnung anzufertigen. (s. Abb. unten und links)</p> <div data-bbox="893 795 1260 996" data-label="Diagram"> </div> <p>Abb. Darstellung der Situation</p> <p>Funktion, die den Abstand beschreibt:</p> $f(x, y) = y + \sqrt{x^2 + (y - 6)^2} + \sqrt{(x - 10)^2 + (y - 6)^2}$ <p>Die Funktion ist von zwei Variablen abhängig und direkt ist eine Nebenbedingung nicht erkennbar. Durch die 3D Darstellung hätten die Schülerinnen und Schüler die Möglichkeit, das Minimum durch Probieren zu finden. Das ist kein Beweis. Zumindest wird aber deutlich, dass es ein Minimum geben muss. Für ein konkreteres Vorgehen sollten die Schülerinnen und Schüler die Situation in die DGS des ClassPad übertragen und ein wenig probieren (s. Abb. links). Die Schülerinnen und Schüler finden so heraus, dass der Punkt E bezüglich der x-Koordinate in der Mitte liegen muss; bzgl. der y-Koordinate stimmt dies nicht. Daraus ergibt sich eine Vereinfachung von f zu:</p> $f(y) = y + \sqrt{25 + (y - 6)^2} + \sqrt{(5 - 10)^2 + (y - 6)^2}$ $f(y) = y + 2\sqrt{25 + (y - 6)^2}$

Bezug zum Lehrplan	Screenshot
<p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <p>(1) führen Extremwertprobleme durch Kombination mit Nebenbedingungen auf Funktionen einer Variablen zurück und lösen diese</p> <p>(2) nutzen die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, der Sinusfunktion, der Kosinusfunktion, der Potenzfunktionen, sowie der Transformationen <math>\sqrt{x}</math> und <math>\frac{1}{x}</math> dieser Funktionen zur Beantwortung von Fragestellungen,</p> <p>(3) bestimmen Parameter einer Funktion mithilfe von Bedingungen, die sich aus dem Kontext ergeben,</p> <p>Zu (2) und (3): Zur Lösung des Problems werden Wurzelfunktionen von ganzrationalen Funktionen benötigt, die sich aus diesen aber mit Hilfe des Satzes von Pythagoras relativ einfach ergeben.</p>	 <p>The top screenshot shows the 'Edit Aktion Interaktiv' window. The input is <math>\text{simplify } (y + \sqrt{25 + (y-6)^2} + \sqrt{25 + (y-6)^2})</math>. The output shows the derivative <math>\frac{d}{dy} (y + 2 \cdot \sqrt{y^2 - 12 \cdot y + 61})</math> and the equation <math>\frac{2 \cdot y + \sqrt{y^2 - 12 \cdot y + 61} - 12}{\sqrt{y^2 - 12 \cdot y + 61}} = 0, y</math>. The solution is <math>y = \frac{-5 \cdot \sqrt{3}}{3} + 6</math>. The numerical value <math>3.113248654</math> is displayed at the bottom.</p> <p>The bottom screenshot shows the 'Edit Zoom Analyse' window. The function <math>y21 = x + 2 \cdot \sqrt{x^2 - 12 \cdot x + 61}</math> is plotted. A minimum point is marked with a red cross at <math>(3.1132, 14.66)</math>. The x-axis is labeled 'Reell' and the y-axis is labeled 'Minimum'. The coordinates of the minimum are <math>x_c = 3.1132486</math> and <math>y_c = 14.660254</math>.</p>

Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
<p>Mit <i>simplify</i> lassen sich in der Regel Terme vereinfachen. Das wäre hier für die weitere Rechnung nicht erforderlich, schafft aber natürlich einen besseren Überblick.</p> <p>Im Menüpunkt <i>Grafik und Tabelle</i> lassen sich Minima auch direkt bestimmen. Man findet das Werkzeug im Unterpunkt <i>Analyse</i>.</p>	<p>Nachdem die Funktion nur noch von einer Variablen abhängig ist, lässt sich das übliche Verfahren anwenden. Auch hier ist die Entscheidung zu treffen, ob die Schülerinnen und Schüler die Berechnung händisch durchführen oder dem ClassPad überlassen. Bei händischer Durchführung kann das CAS zur Überprüfung genutzt werden.</p> <p>Wenn man den Funktionsgraphen betrachtet, erkennt man, dass der Verlauf im Bereich des Minimums eher flach ist. Das heißt, kleine Abweichungen führen nicht zu einer größeren Verlängerung der gesamten Strecke. Der y-Wert für E erscheint zunächst etwas merkwürdig zu sein. Wenn man hingegen die sich um den Punkt E ergebenden Winkel misst, so erkennt man, dass alle drei die Größe <math>120^\circ</math> haben. Ein Hinweis bildet dabei schon der exakte y-Wert für den Punkt E. Daraus folgt, dass die beiden Katheten in dem Dreieck <math>EE_xE_y</math> die Längen 5 und <math>\frac{5\sqrt{3}}{3}</math> haben.</p> <p>Die Punkte <math>E_x</math> und <math>E_y</math> sind dabei die Schnittpunkte der Parallelen zu den Koordinatenachsen mit diesen. Bildet man den Arkustangens, so erhält man das Winkelmaß <math>60^\circ</math>; insgesamt also einen Winkel der Größe <math>120^\circ</math>. Dieses Winkelmaß findet man auch bei den Waben der Bienen.</p>

Bezug zum Lehrplan	Screenshot
<p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <p>(1) führen Extremwertprobleme durch Kombination mit Nebenbedingungen auf Funktionen einer Variablen zurück und lösen diese</p> <p>(2) nutzen die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, der Sinusfunktion, der Kosinusfunktion, der Potenzfunktionen, <math>\sqrt{x}</math> und <math>\frac{1}{x}</math> sowie der Transformationen dieser Funktionen zur Beantwortung von Fragestellungen,</p> <p>(3) bestimmen Parameter einer Funktion mithilfe von Bedingungen, die sich aus dem Kontext ergeben,</p> <p>Zu (2) und (3): Zur Lösung des Problems werden Wurzelfunktionen von ganzrationalen Funktionen benötigt, die sich aus diesen aber mit Hilfe des Satzes von Pythagoras relativ einfach ergeben.</p>	 <p>The screenshot shows a CAS interface with the following content:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Top bar: Edit Aktion Interaktiv</li> <li>Toolbar: <math>\frac{0.5}{2}</math>, <math>\frac{1}{2}</math>, <math>\int dx</math>, <math>\int dx \downarrow</math>, Simp, <math>\int dx</math>, <math>\int dx \uparrow</math>, <math>\int dx</math>, <math>\int dx</math></li> <li>Input field: <math>\frac{d}{dy} \left( y + 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + (b-y)^2} \right)</math></li> <li>Result: <math>\frac{4 \cdot y - 4 \cdot b + \sqrt{4 \cdot y^2 + a^2 + 4 \cdot b^2 - 8 \cdot b \cdot y}}{\sqrt{4 \cdot y^2 + a^2 + 4 \cdot b^2 - 8 \cdot b \cdot y}}</math></li> <li>Input field: solve <math>\left( \frac{4 \cdot y - 4 \cdot b + \sqrt{4 \cdot y^2 + a^2 + 4 \cdot b^2 - 8 \cdot b \cdot y}}{\sqrt{4 \cdot y^2 + a^2 + 4 \cdot b^2 - 8 \cdot b \cdot y}} \right)</math></li> <li>Result: <math>\left\{ y = \frac{-\sqrt{3} \cdot a}{6} + b, y = \frac{\sqrt{3} \cdot a}{6} + b \right\}</math></li> <li>Input field: <math>\tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{3} \cdot a}{6} / (a/2) \right)</math></li> <li>Result: 30</li> <li>Bottom bar: Algeb Standard Reell 360°</li> </ul> <p>Below the CAS interface is a geometric diagram:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Points: A, E, B on a horizontal line; D, C above it.</li> <li>Line segments: DE (s1), EC (s2), DC.</li> <li>Text: s1: 1.88, s2: 2.39, s1+s2=4.50</li> </ul> <p>Below the diagram is another CAS interface:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Input field: <math>\frac{d}{dx} \left( \sqrt{b^2 + x^2} + \sqrt{(a-x)^2 + b^2} \right)</math></li> <li>Result: <math>\frac{x \cdot \sqrt{x^2 + a^2 + b^2} - 2 \cdot a \cdot x + x \cdot \sqrt{x^2 + b^2}}{\sqrt{(x^2 + a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot x)} \cdot (x + \sqrt{x^2 + b^2})}</math></li> <li>Input field: solve <math>\left( \frac{x \cdot \sqrt{x^2 + a^2 + b^2} - 2 \cdot a \cdot x + x \cdot \sqrt{x^2 + b^2}}{\sqrt{(x^2 + a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot x)} \cdot (x + \sqrt{x^2 + b^2})} \right)</math></li> <li>Result: <math>\left\{ x = \frac{a}{2} \right\}</math></li> <li>Bottom bar: n</li> </ul>

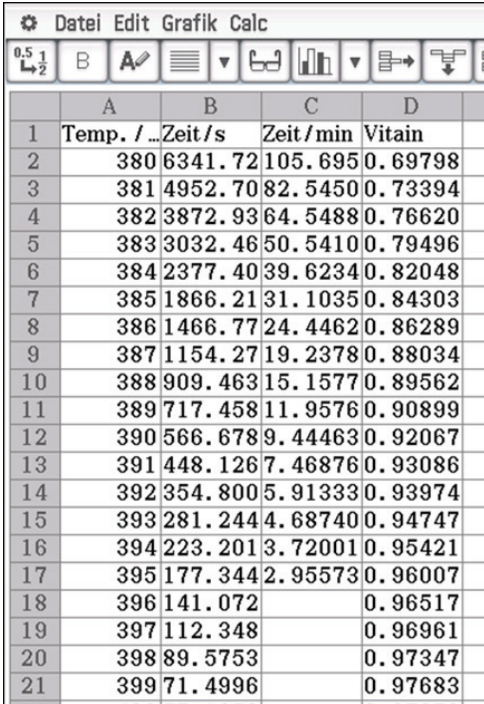
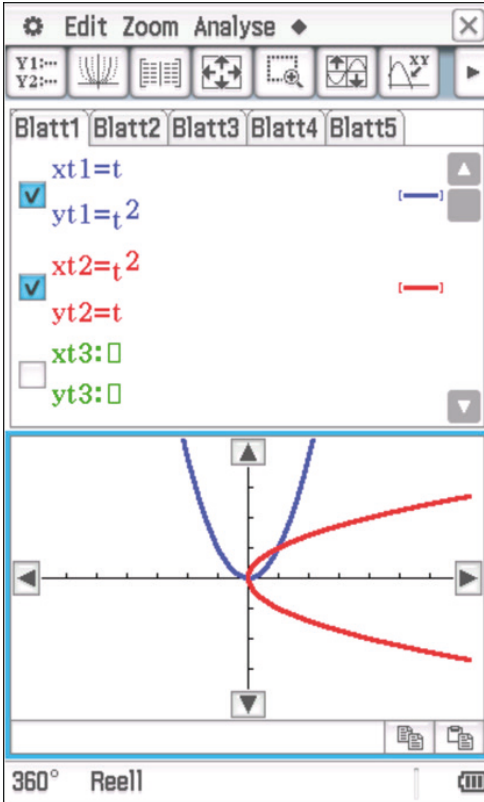
Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
<p>Aus Gründen der Übersicht wurde die Funktion unter der Bedingung <math>x = \frac{a}{2}</math> entsprechend vereinfacht.</p> <p>Die Punkte A, B, C und D werden so gesetzt, dass sie ein Rechteck bilden. Der Punkt E wird auf die Strecke AB gesetzt und ist dadurch nur noch auf dieser verschiebbar. Im Messfenster können durch markieren der jeweiligen Endpunkte die Streckenlängen gemessen, im Messfenster markiert und in das aktive Fenster gezogen werden.</p> <p>Die Summe lässt sich berechnen durch: <i>Zeichnen</i> -&gt; <i>Formelterm</i> (@1+@2). Die vorgegebene Beschriftung lässt sich ändern, indem das jeweilige Objekt markiert wird</p>  <p>und im Messfenster das untere Symbol gewählt wird.</p>	<p>Wenn dieses so gilt, müsste sich ein Winkel von <math>120^\circ</math> unabhängig von der Länge der Punkte A und B und des Abstandes der Strecke AB von der Geraden ergeben. Wenn man die partiellen Ableitungen bildet und diese gleich 0 setzt, kann der ClassPad das sich daraus ergebende allgemeine Gleichungssystem nicht lösen. Unter der Symmetrieannahme bzgl. der x-Richtung zeigt sich, dass sich ein Winkel von <math>120^\circ</math> (zu dem errechneten Winkel (s. Abb. links) sind noch <math>90^\circ</math> hinzuzuaddieren.) ergibt.</p> <p>Es bleibt, die Annahme hinsichtlich der Symmetrie zu begründen. Dazu lässt sich die Situation, wie in der Abbildung links dargestellt, vereinfachen. Die Symmetrie lässt sich jetzt geometrisch oder mit Mitteln der Analysis begründen.</p> <p>Dazu sind die Punkte A [0,0], B[a,0], C[a,b] und D[0,b] gewählt. Der Punkt E[x,0] liegt auf der Strecke AB. Zu minimieren ist jetzt die Summe der Strecken <math>s_1=ED</math> und <math>s_2=EC</math>. Geometrisch lässt sich mit der Spiegelachse, die senkrecht zu AB durch den Punkt E verläuft argumentieren.</p> <p>Besonders im Grundkurs könnte es für die Schülerinnen und Schüler hilfreich sein, wenn sie zunächst in der DGS den Punkt E verschieben und beobachten, wie sich die Summe der Streckenlängen verändert.</p> <p>Im Rahmen der Analysis wird die Funktion der Summe der beiden Streckenlängen aufgestellt, die Ableitung gebildet und das Minimum bestimmt. Dass es sich um ein Minimum handelt, ergibt sich direkt aus dem Sachzusammenhang</p>



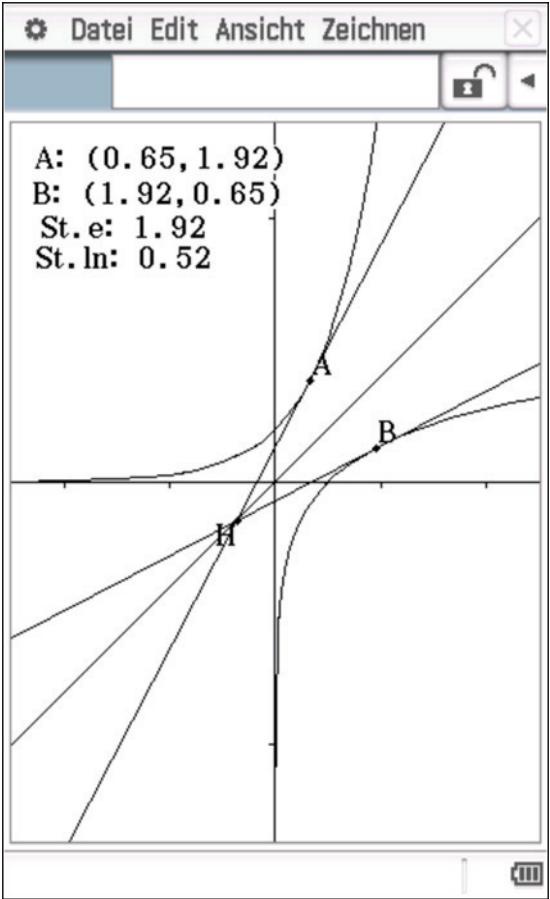
Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
<p>Die Funktionen wurden im <i>main</i> Bereich als <math>f(T,t)</math> bzw. <math>g(T,t)</math> definiert.  <i>Define <math>f(T,t) = \dots</math></i>  <i>Define <math>g(T,t) = \dots</math></i>  s. auch Abb. links unten</p> <p>Für den Bereich wurde gewählt:  <math>-1 \leq x \leq 1000</math> und <math>-0,1 \leq y \leq 1,1</math></p>	<p><b>Optimierung bei der Sterilisation von Lebensmitteln</b>  Um Lebensmittel haltbar zu machen, ist es erforderlich, dass diese erhitzt werden, um die Mikroorganismen auf das <math>10^{-7}</math>-fache zu reduzieren und gleichzeitig möglichst viele Nährstoffe zu erhalten. Der temperaturresistenteste Mikroorganismus in einer Fleischkonserve ist das Bakterium Clostridium Botulinum, der temperaturanfällige Nährstoff, der erhalten bleiben soll, ist das Vitamin Thiamin (Vitamin B1).  Sie zerfallen gemäß der folgenden Funktionen<sup>1</sup>:</p> $f_T(t) = a_0 \cdot e^{-(5,7190 \cdot 10^{11} \cdot e^{-\frac{14003}{T}}) \cdot t}$ $g_T(t) = b_0 \cdot e^{-(2,0468 \cdot 10^{38} \cdot e^{-\frac{35792}{T}}) \cdot t}$ <p><math>a_0</math> und <math>b_0</math> geben jeweils die Ausgangsmassen an. <math>T</math> gibt die Temperatur in K und <math>t</math> die Zeit in s an. Das Problem besteht nun darin, eine optimale Temperatur und Zeit für die Sterilisation zu finden. Für die Lösung ist es hilfreich, sich zunächst einen Überblick zu verschaffen. Dazu definiert man obige Funktionen, setzt <math>a_0 = b_0 = 1</math> und wählt zum Beispiel für die Temperatur <math>T=380</math> K bzw. <math>T=390</math> K. (s. Abb. links)  Die Grafen zeigen, dass das Bakterium schneller zerfällt als das Vitamin.  Um sich einen Überblick zu verschaffen, wird die Zeit <math>t</math> in Abhängigkeit von der Temperatur <math>T</math> unter der Bedingung der geforderten Reduzierung der Bakterien als Funktion bestimmt.</p>

<sup>1</sup>Die Gleichungen wurden aus Kiehl (Kiehl, M. 2010: Mathematisches Modellieren für die Sekundarstufe II S. 64, Cornelsen SCRIPTOR, Berlin) entnommen.

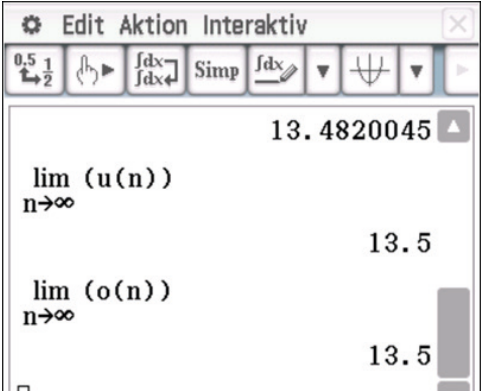
# Die Umkehrfunktion

Bezug zum Lehrplan	Screenshot																																																																																																														
<p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <p>(1) führen Extremwertprobleme durch Kombination mit Nebenbedingungen auf Funktionen einer Variablen zurück und lösen diese</p> <p>Es macht sicher Sinn, auch Beispiele zu behandeln, wo sich die Hauptbedingung nicht auf eine Funktion einer Variablen zurückführen lässt. Der Einsatz des ClassPad trägt aber trotzdem zur Klärung bei.</p> <p>(2) nutzen die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, der Sinusfunktion, der Kosinusfunktion, der Potenzfunktionen, <math>\sqrt{x}</math> und <math>1/x</math> sowie der Transformationen dieser Funktionen zur Beantwortung von Fragestellungen</p>	 <table border="1" data-bbox="852 443 1337 1144"> <thead> <tr> <th></th> <th>A</th> <th>B</th> <th>C</th> <th>D</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>Temp. / ...Zeit/s</td><td>Zeit/min</td><td>Vitain</td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td>380</td><td>6341.72</td><td>105.695</td><td>0.69798</td></tr> <tr><td>3</td><td>381</td><td>4952.70</td><td>82.5450</td><td>0.73394</td></tr> <tr><td>4</td><td>382</td><td>3872.93</td><td>64.5488</td><td>0.76620</td></tr> <tr><td>5</td><td>383</td><td>3032.46</td><td>50.5410</td><td>0.79496</td></tr> <tr><td>6</td><td>384</td><td>2377.40</td><td>39.6234</td><td>0.82048</td></tr> <tr><td>7</td><td>385</td><td>1866.21</td><td>31.1035</td><td>0.84303</td></tr> <tr><td>8</td><td>386</td><td>1466.77</td><td>24.4462</td><td>0.86289</td></tr> <tr><td>9</td><td>387</td><td>1154.27</td><td>19.2378</td><td>0.88034</td></tr> <tr><td>10</td><td>388</td><td>909.463</td><td>15.1577</td><td>0.89562</td></tr> <tr><td>11</td><td>389</td><td>717.458</td><td>11.9576</td><td>0.90899</td></tr> <tr><td>12</td><td>390</td><td>566.678</td><td>9.44463</td><td>0.92067</td></tr> <tr><td>13</td><td>391</td><td>448.126</td><td>7.46876</td><td>0.93086</td></tr> <tr><td>14</td><td>392</td><td>354.800</td><td>5.91333</td><td>0.93974</td></tr> <tr><td>15</td><td>393</td><td>281.244</td><td>4.68740</td><td>0.94747</td></tr> <tr><td>16</td><td>394</td><td>223.201</td><td>3.72001</td><td>0.95421</td></tr> <tr><td>17</td><td>395</td><td>177.344</td><td>2.95573</td><td>0.96007</td></tr> <tr><td>18</td><td>396</td><td>141.072</td><td></td><td>0.96517</td></tr> <tr><td>19</td><td>397</td><td>112.348</td><td></td><td>0.96961</td></tr> <tr><td>20</td><td>398</td><td>89.5753</td><td></td><td>0.97347</td></tr> <tr><td>21</td><td>399</td><td>71.4996</td><td></td><td>0.97683</td></tr> </tbody> </table>		A	B	C	D	1	Temp. / ...Zeit/s	Zeit/min	Vitain		2	380	6341.72	105.695	0.69798	3	381	4952.70	82.5450	0.73394	4	382	3872.93	64.5488	0.76620	5	383	3032.46	50.5410	0.79496	6	384	2377.40	39.6234	0.82048	7	385	1866.21	31.1035	0.84303	8	386	1466.77	24.4462	0.86289	9	387	1154.27	19.2378	0.88034	10	388	909.463	15.1577	0.89562	11	389	717.458	11.9576	0.90899	12	390	566.678	9.44463	0.92067	13	391	448.126	7.46876	0.93086	14	392	354.800	5.91333	0.93974	15	393	281.244	4.68740	0.94747	16	394	223.201	3.72001	0.95421	17	395	177.344	2.95573	0.96007	18	396	141.072		0.96517	19	397	112.348		0.96961	20	398	89.5753		0.97347	21	399	71.4996		0.97683
	A	B	C	D																																																																																																											
1	Temp. / ...Zeit/s	Zeit/min	Vitain																																																																																																												
2	380	6341.72	105.695	0.69798																																																																																																											
3	381	4952.70	82.5450	0.73394																																																																																																											
4	382	3872.93	64.5488	0.76620																																																																																																											
5	383	3032.46	50.5410	0.79496																																																																																																											
6	384	2377.40	39.6234	0.82048																																																																																																											
7	385	1866.21	31.1035	0.84303																																																																																																											
8	386	1466.77	24.4462	0.86289																																																																																																											
9	387	1154.27	19.2378	0.88034																																																																																																											
10	388	909.463	15.1577	0.89562																																																																																																											
11	389	717.458	11.9576	0.90899																																																																																																											
12	390	566.678	9.44463	0.92067																																																																																																											
13	391	448.126	7.46876	0.93086																																																																																																											
14	392	354.800	5.91333	0.93974																																																																																																											
15	393	281.244	4.68740	0.94747																																																																																																											
16	394	223.201	3.72001	0.95421																																																																																																											
17	395	177.344	2.95573	0.96007																																																																																																											
18	396	141.072		0.96517																																																																																																											
19	397	112.348		0.96961																																																																																																											
20	398	89.5753		0.97347																																																																																																											
21	399	71.4996		0.97683																																																																																																											
<p>Nur GK: Die Schülerinnen und Schüler</p> <p>(4) erläutern den Begriff der Umkehrfunktion am Beispiel der Wurzelfunktion unter Berücksichtigung des Graphen sowie des Definitions- und des Wertebereichs</p>	 <p>360° Reell</p>																																																																																																														

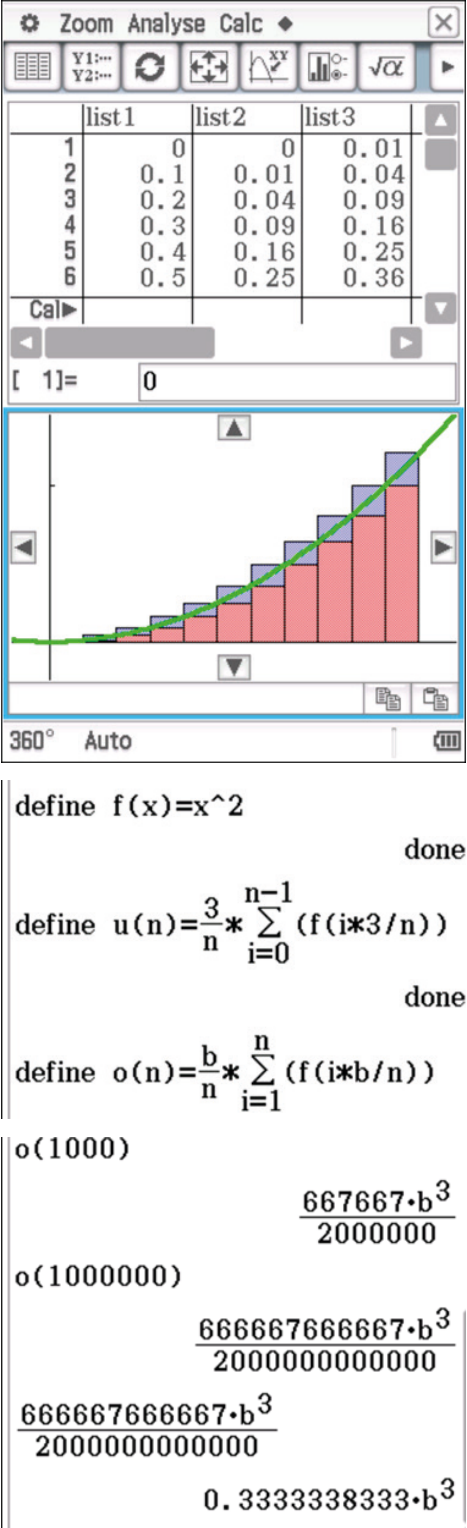
Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
<p>Die Werte in Spalte A sind willkürlich vorgegeben. Die zweite Spalte ergibt sich aus der oben definierten Funktion Zeit(T) durch Bezug auf die Spalte A. Die Spalte C dient zur besseren Einschätzung des Zeitbedarfs. Die Spalte D erhält man mit der Funktion f und der Bezugnahme auf die Spalten A und B.</p> <p>Im Bereich <i>Grafik &amp; Tabelle</i> lässt unter dem Menüpunkt Typ der Parametertyp einstellen. Die x- und y-Koordinaten werden dann in Abhängigkeit von t dargestellt. Unter  ist zu beachten, dass auch für die Variable t ein Bereich einzustellen ist. Da der Parametertyp vor allem für trigonometrische Funktionen gedacht ist, bezieht sich die Voreinstellung für t auf Winkel. <math>0^\circ \leq t \leq 360^\circ</math> bzw. <math>0 \leq t \leq 2\pi</math>. Sinnvoll ist, vorher in den Grundeinstellungen das Winkelmaß auf das Bogenmaß einzustellen. Für den Bereich von t eignet sich z. B. <math>-10 \leq t \leq 10</math> mit einer Schrittweite von 0,1</p>	<p>Mit Hilfe der Tabellenkalkulation lässt sich am einfachsten ein Überblick verschaffen. Relevante Temperaturen beginnen bei 380 K. Für die Klärung sind jetzt außermathematische Kriterien, wie die Frage nach der maximal möglichen Temperatur, der Mindestdauer usw., bedeutsam. Besonders für die Zeitvorgabe muss die Größe des Gefäßes und damit verbunden die Geschwindigkeit der Temperaturübertragung berücksichtigt werden, denn es wird kaum möglich sein, dass beim Erhitzen die Temperatur in der gesamten Menge stets gleich ist. Allerdings wird aus der Abbildung 3 deutlich, dass der Vitamin-Gehalt mit steigender Temperatur und gleichzeitiger Verringerung der Dauer der Sterilisation steigt.</p> <p><b>Umkehrfunktionen</b> Die Gleichungen für Umkehrfunktionen lassen sich in der Regel nicht bestimmen. Aber mit Hilfe eines Funktionsplotters sind die Grafen immer darstellbar. Man kann dazu die Parameterdarstellung wählen, die eigentlich ja für die trigonometrischen Funktionen vorgesehen ist. Für die Schülerinnen und Schüler wird dadurch deutlich, dass das Bilden einer Umkehrfunktion bedeutet, x und y zu tauschen. Damit es sich bei der Umkehrfunktion um eine Funktion handelt, ist der Bereich für die Variable t entsprechend einzuschränken.</p>




Bezug zum Lehrplan	Screenshot
<p>Nur LK: Die Schülerinnen und Schüler</p> <p>(12) untersuchen ausgewählte Funktionen, insbesondere die natürliche Exponential- und Logarithmusfunktion, auf Umkehrbarkeit und ermitteln in einfachen Fällen einen Funktionsterm der Umkehrfunktion unter Berücksichtigung von Definitions- und Wertebereich,</p>	

Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
<p>Es werden die Funktionsgrafen von <math>e^x</math> und <math>\ln(x)</math> im Geometrie Menü gezeichnet. Da die Winkelhalbierende als Konstruktionshilfe genutzt wird, kann diese nicht als Funktionsgraf von <math>f(x) = x</math> sondern muss als Gerade durch 2 Punkte, die auf der Symmetrieachse liegen, gezeichnet werden. Die Tangente an den Grafen der e-Funktion erhält man durch: <i>Zeichnen -&gt; Konstruiere -&gt; Tangente an Kurve</i></p> <p>Der Punkt A wird dadurch automatisch gesetzt und ist an den Funktionsgrafen gebunden. Der Punkt B wird konstruiert, indem der Punkt A und die Winkelhalbierende markiert werden und: <i>Zeichnen -&gt; Konstruiere -&gt; Senkrechte</i></p> <p>Der Befehl <i>Tangente an Kurve</i> erzeugt automatisch einen neuen Punkt und lässt sich daher nicht auf einen gegebenen Punkt anwenden. Aus Symmetriegründen müssen die Tangenten am Punkt A und an B einen gemeinsamen Schnittpunkt mit der Winkelhalbierenden haben. So lässt sich die Tangente als Gerade durch die Punkte B und H konstruieren.</p> <p>Die Darstellung der Werte im Fenster mit der Konstruktion erhält man auf folgende Art: Zum Beispiel: Markierung von A -&gt; Darstellung im Messbereich -&gt; Herunterziehen mit dem Stift Die Bezeichnung lässt sich im Messbereich entsprechend ändern. Mit den anderen Objekten wird ebenso verfahren.</p> <p>Durch die Darstellung im Konstruktionsbereich werden die Veränderungen unmittelbar deutlich. Mit dem Befehl Formelterm hätte man noch zusätzlich zeigen können, dass das Produkt von St.e und St.ln immer den Wert 1 ergibt.</p>	<p>Die Ableitung für die Funktion <math>f(x) = \ln(x)</math> wird mit Hilfe der Kettenregel hergeleitet. Dabei ist es für die Schülerinnen und Schüler in der Regel schwierig zu verstehen, dass sich die eine Ableitung auf <u>den</u> Punkt P (a,b) und die andere auf den Punkt P (b,a) bezieht. Dieses wird durch die Dynamik der DGS erleichtert. Des Weiteren ergibt sich, dass das Produkt der Ableitungen den Wert 1 hat. Dies ist kein Beweis, aber ein Hinweis, der zur Unterstützung des Beweises dient.</p>

Bezug zum Lehrplan	Screenshot																																								
<p>Inhaltliche Schwerpunkte</p> <p>Integralrechnung: Produktsumme, orientierte Fläche, Bestandsfunktion, Integralfunktion, Stammfunktion, bestimmtes Integral, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung</p> <p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <p>(11) interpretieren Produktsummen im Sachkontext als Rekonstruktion des Gesamtbestandes oder Gesamteffektes einer Größe,</p> <p>(12) deuten die Inhalte von orientierten Flächen im Kontext der Fragestellung,</p> <p>(13) skizzieren zum Graphen einer gegebenen Randfunktion den Graphen der zugehörigen Flächeninhaltsfunktion,</p> <p>(14) erläutern und vollziehen an geeigneten Beispielen den Übergang von der Produktsumme zum Integral auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs,</p>	<pre> define f(x)=x^2+x done define u(n)=3/n * sum_{i=0}^{n-1} (f(i*3/n)) done define o(n)=3/n * sum_{i=1}^n (f(i*3/n)) done o(1000) 13.5180045 u(1000) 13.4820045 </pre> <table border="1" data-bbox="847 1028 1313 1397"> <thead> <tr> <th>1</th> <th>n</th> <th>u(n)</th> <th>o(n)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>2</td> <td>10</td> <td>11.745</td> <td>15.345</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>100</td> <td>13.3205</td> <td>13.6805</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>1000</td> <td>13.4820</td> <td>13.5180</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>10000</td> <td>13.4982</td> <td>13.5018</td> </tr> <tr> <td>6</td> <td>100000</td> <td>13.4998</td> <td>13.5002</td> </tr> <tr> <td>7</td> <td>1000000</td> <td>13.5000</td> <td>13.5000</td> </tr> <tr> <td>8</td> <td>1.00E+7</td> <td>13.5000</td> <td>13.5000</td> </tr> <tr> <td>9</td> <td>1.00E+8</td> <td>13.5000</td> <td>13.5000</td> </tr> <tr> <td>10</td> <td>1.00E+9</td> <td>13.5000</td> <td>13.5000</td> </tr> </tbody> </table>  <p>The screenshot shows a CAS interface with a toolbar containing icons for zooming, navigation, and mathematical operations like integration and simplification. The main display area shows the numerical value 13.4820045 at the top, followed by the limit expression <math>\lim_{n \rightarrow \infty} (u(n))</math> with the result 13.5, and <math>\lim_{n \rightarrow \infty} (o(n))</math> with the result 13.5.</p>	1	n	u(n)	o(n)	2	10	11.745	15.345	3	100	13.3205	13.6805	4	1000	13.4820	13.5180	5	10000	13.4982	13.5018	6	100000	13.4998	13.5002	7	1000000	13.5000	13.5000	8	1.00E+7	13.5000	13.5000	9	1.00E+8	13.5000	13.5000	10	1.00E+9	13.5000	13.5000
1	n	u(n)	o(n)																																						
2	10	11.745	15.345																																						
3	100	13.3205	13.6805																																						
4	1000	13.4820	13.5180																																						
5	10000	13.4982	13.5018																																						
6	100000	13.4998	13.5002																																						
7	1000000	13.5000	13.5000																																						
8	1.00E+7	13.5000	13.5000																																						
9	1.00E+8	13.5000	13.5000																																						
10	1.00E+9	13.5000	13.5000																																						

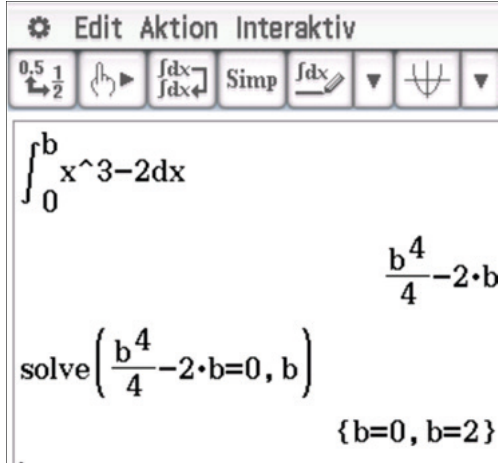
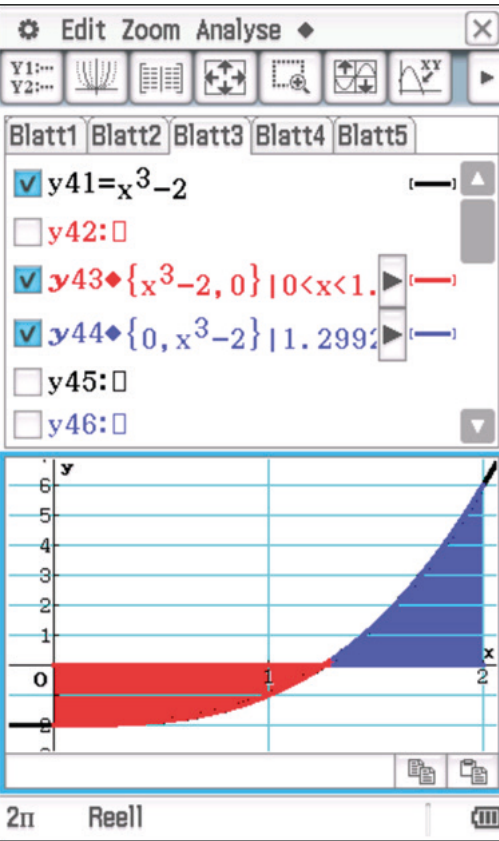
Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
<p>Unter- und Obersummen werden entsprechend im Bereich <i>main</i> definiert. Die für die Summe erforderlichen Zeichen findet man in der Tastatur <i>math2</i>.</p> <p>Im <i>main</i> definierte Funktionen stehen auch in der Tabellenkalkulation zur Verfügung. Die Werte für n finden sich in der ersten Spalte. B2: =u(A2) Die weiteren Werte ergeben sich durch: markieren C2 -&gt; kopieren -&gt; markieren C3 bis C10 -&gt; <i>einfügen</i></p> <p>Das Symbol für den Grenzwert findet man in der <i>math2</i> Tastatur</p>	<p>Bei der Berechnung von bestimmten Integralen geht es zunächst darum, Grenzwerte von Unter- und Obersummen zu bestimmen. Wir gehen dafür von <math>f(x) = x^2 + x</math> und dem Intervall <math>[0/3]</math> aus. Das Intervall wird in <math>\frac{3}{n}</math> gleich lange Teilintervalle aufgeteilt.</p> $u(n) = \frac{3}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} f\left(i \cdot \frac{3}{n}\right)$ $o(n) = \frac{3}{n} \cdot \sum_{i=1}^n f\left(i \cdot \frac{3}{n}\right)$ <p>Bevor die entsprechenden Grenzwerte gebildet werden, ist es für die Schülerinnen und Schüler einsichtiger, wenn zunächst konkrete Werte bestimmt werden. So lässt sich der Annäherungsprozess von Unter- und Obersumme anschaulicher darstellen. Für eine bessere Übersicht kann man in die Tabellenkalkulation wechseln.</p> <p>Der Grenzwert lässt sich direkt bestimmen. Wir sind aber der Meinung, dass der Prozess durch die Darstellung in der Tabellenkalkulation für die Schülerinnen und Schüler verständlicher wird. Auf der anderen Seite gibt es ein Verfahren, wie sich die Grenzwerte bestimmen lassen. Ein solches Verfahren liegt auch der benutzten Software zu Grunde.</p>

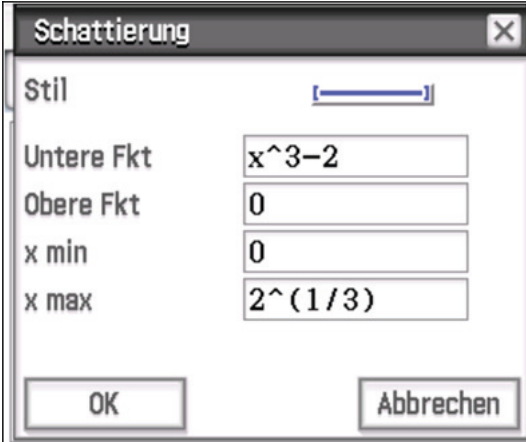
Bezug zum Lehrplan	Screenshot
<p>Inhaltliche Schwerpunkte</p> <p>Integralrechnung: Produktsumme, orientierte Fläche, Bestandsfunktion, Integralfunktion, Stammfunktion, bestimmtes Integral, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung</p> <p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <p>(11) interpretieren Produktsummen im Sachkontext als Rekonstruktion des Gesamtbestandes oder Gesamteffektes einer Größe,</p> <p>(12) deuten die Inhalte von orientierten Flächen im Kontext der Fragestellung,</p> <p>(13) skizzieren zum Graphen einer gegebenen Randfunktion den Graphen der zugehörigen Flächeninhaltsfunktion,</p> <p>(14) erläutern und vollziehen an geeigneten Beispielen den Übergang von der Produktsumme zum Integral auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs,</p>	 <pre> define f(x)=x^2 done define u(n)=3/n * sum(f(i*3/n), i=0, n-1) done define o(n)=b/n * sum(f(i*b/n), i=1, n) o(1000) 667667*b^3 2000000 o(1000000) 666667666667*b^3 2000000000000 666667666667*b^3 2000000000000 0.3333338333*b^3 </pre>

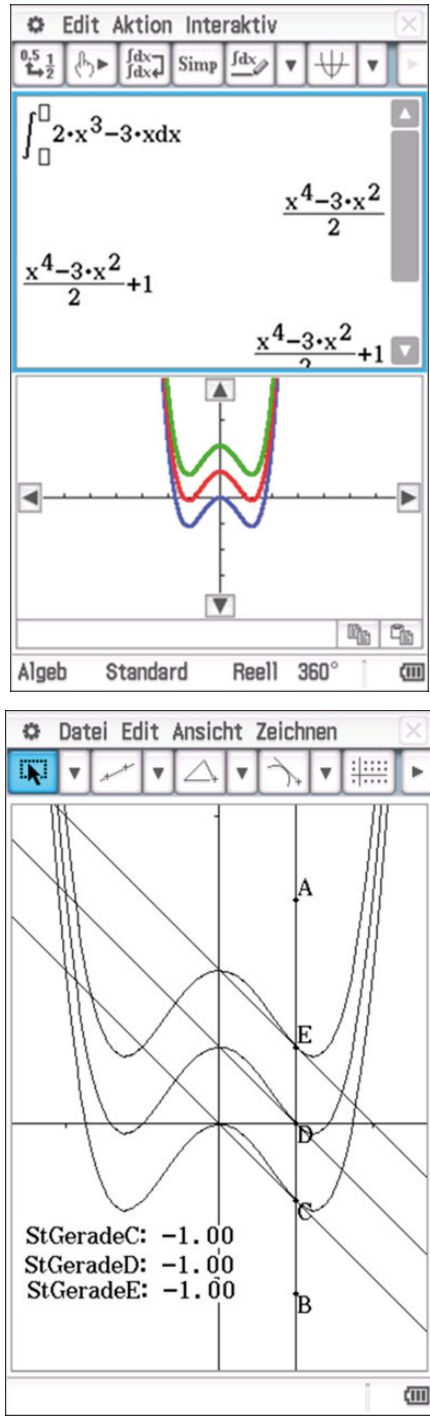
Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
<p>In der Tabellenkalkulation sind die Listen (s. Abb. links) erzeugt worden. Mit Hilfe der Export Funktion in der TK lassen sich die Werte dann in das Statistik Modul übertragen. Dazu sind die jeweiligen Spalten zu markieren und dann jeweils der entsprechende Name der Liste (list1 usw.) einzugeben. Mit  werden die jeweiligen Grafiken eingestellt. Die folgende Abb. bezieht sich auf die Obersummen</p>  <p>Für die Untersummen wählt man für die Einstellungen oben die 2 und gibt für die Häufigkeit list2 ein. Für den Grafen von <math>f(x)=x^2</math> nimmt man bei 3 anstatt des Histogramms die quadratische Regression. Mit  erhält man die visuelle Darstellung.</p>	<p>Es sollen die Ober- und Untersummen für die Funktion <math>f(x)=x^2</math> im Intervall <math>[0/1]</math> dargestellt werden.</p> <p>Eine solche Darstellung lässt sich leider nicht direkt erzeugen. Von daher ist zu entscheiden, ob dies mit dem ClassPad gemacht werden soll. Hinzu kommt, dass für das Zeichnen des Funktionsgrafes die quadratische Regression benötigt wird.</p> <p>Aus der Grafik können die Schülerinnen und Schüler immerhin direkt den Unterschied zwischen den beiden Summen erkennen. Leider ist es auch nicht möglich, die Anzahl der Unterteilungen variabel zu gestalten. Dazu müsste ein Programm geschrieben werden, wobei zu entscheiden ist, ob der Aufwand angemessen ist.</p> <p>Für das Erkennen von Zusammenhängen wird eine einfache Funktion gewählt. Die rechte Intervallgrenze wird durch eine Variable ersetzt. Die Schülerinnen und Schüler haben so die Möglichkeit, den Hauptsatz eigenständig zu entdecken. Wir empfehlen zunächst verschiedene <math>n</math> auszuprobieren und nicht unmittelbar den Grenzwert bestimmen zu lassen.</p>



Bezug zum Lehrplan	Screenshot
<p>Inhaltliche Schwerpunkte</p> <p>Integralrechnung: Produktsumme, orientierte Fläche, Bestandsfunktion, Integralfunktion, Stammfunktion, bestimmtes Integral, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung</p> <p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <p>(11) interpretieren Produktsummen im Sachkontext als Rekonstruktion des Gesamtbestandes oder Gesamteffektes einer Größe,</p> <p>(12) deuten die Inhalte von orientierten Flächen im Kontext der Fragestellung,</p> <p>(13) skizzieren zum Graphen einer gegebenen Randfunktion den Graphen der zugehörigen Flächeninhaltsfunktion,</p> <p>(14) erläutern und vollziehen an geeigneten Beispielen den Übergang von der Produktsumme zum Integral auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs,</p>	<div style="text-align: right;"> <math display="block">\frac{b^3}{3}</math> </div> <pre> define o(n) = <math>\frac{b}{n} * \sum_{i=1}^n (f(i*b/n))</math> done  lim (o(n)) n -&gt; inf  <math display="block">\frac{b \cdot (2 \cdot b^2 + 3 \cdot b)}{6}</math>  expand(<math>\frac{b \cdot (2 \cdot b^2 + 3 \cdot b)}{6}</math>)  <math display="block">\frac{b^3}{3} + \frac{b^2}{2}</math> </pre> <hr/> <div style="border: 1px solid gray; padding: 5px;"> <p style="text-align: center;">Edit Aktion Interaktiv</p> <div style="display: flex; justify-content: space-between; border-bottom: 1px solid gray; margin-bottom: 5px;"> <span>0,5 <math>\frac{1}{2}</math></span> <span><math>\int dx</math> <math>\int dx</math></span> <span>Simp <math>\int dx</math></span> <span><math>\int dx</math></span> <span><math>\int dx</math></span> </div> <pre> define f(x) = x^2 done  define u(a, b, n) = <math>\frac{(b-a)}{n} * \sum_{k=1}^{n-1} (</math> done  <math>\frac{(b-a)}{n} * \sum_{k=1}^{n-1} (a + f(k*(b-a)/n))</math> done  u(1, 2, 100)  1.31835 </pre> </div>

Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
<p>Den Befehl für die Grenzwertberechnung findet man in der <i>math2</i> Tastatur</p> <p>Der ClassPad erzeugt nicht automatisch den als übersichtlicher geltenden Term. So sind die Befehle <i>expand</i> bzw. <i>simplify</i> auf den Term anzuwenden</p> <p>Da der gesamte Ausdruck in diesem Format nicht darstellbar ist, wurde die rechte Seite nochmals kopiert und darunter eingefügt.</p>	<p>Nachdem die Grenzwerte für Elementarfunktionen bestimmt sind, können Schülerinnen und Schüler dies auch auf zusammengesetzte Funktionen übertragen. Für einen besseren Überblick wurde der Zähler ausmultipliziert und der Bruch in zwei Teilbrüche aufgeteilt.</p> <p>Die Funktionen für die Unter- bzw. Obersumme lassen sich hinsichtlich des Intervalls verallgemeinern. Die Funktion für die Obersumme lässt sich entsprechend definieren.</p>

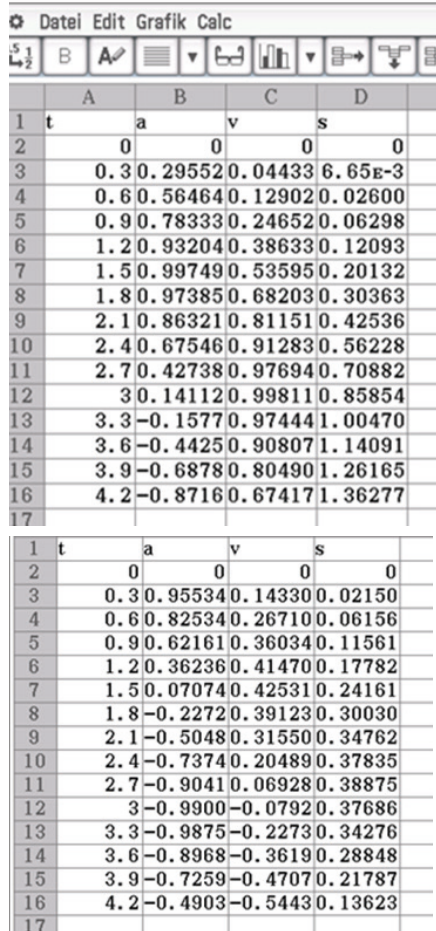
Bezug zum Lehrplan	Screenshot
<p>Inhaltliche Schwerpunkte:</p> <p>Integralrechnung: Produktsumme, orientierte Fläche, Bestandsfunktion, Integralfunktion, Stammfunktion, bestimmtes Integral, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung</p> <p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <p>(12) deuten die Inhalte von orientierten Flächen im Kontext der Fragestellung,</p>	 <p> <math display="block">\int_0^b x^3 - 2 dx</math> <math display="block">\frac{b^4}{4} - 2 \cdot b</math> <math display="block">\text{solve}\left(\frac{b^4}{4} - 2 \cdot b = 0, b\right)</math> <math display="block">\{b=0, b=2\}</math> </p>  <p> <math display="block">\int_0^2 \text{abs}(x^3 - 2) dx</math> <math display="block">3 \cdot 2^{\frac{1}{3}}</math> </p>

Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
<p>Die Lösung wird in 2 Schritten bestimmt.</p> <p>Für die Darstellung links ist es erforderlich, die Nullstelle zu kennen. Diese lässt sich auch direkt ablesen:  <i>Analyse -&gt; Grafische Lösung -&gt; Nullstelle</i></p> <p>Die farbliche Darstellung lässt sich über das Menü Raute (oben ganz rechts neben <i>Analyse</i>) einrichten. Die Farbe kann bei <i>Stil</i> gewählt werden.</p>  <p>Der Betrag kann auch durch das entsprechende Symbol in der Math1 Tastatur (3. Zeile ganz links) angegeben werden.</p>	<p>Diskutiert wird die Gleichung:</p> $\int_0^b x^3 - 2dx = 0$ <p>Die Lösung <math>b=0</math> ist die triviale Lösung. Für Schülerinnen und Schüler mag es erstaunlich sein, dass der Wert des Integrals im Intervall <math>[0,2]</math> den Wert 0 hat.</p> <p>Der Schnittpunkt mit der x-Achse hat die Koordinaten <math>s(\sqrt[3]{2}, 0)</math></p> <p>Der Wert 0 kommt dadurch zustande, dass die „rote“ und die „blaue“ Fläche den gleichen Inhalt haben.</p> <p>Will man den tatsächlichen Flächeninhalt bestimmen, so ist die Betragsfunktion zu betrachten. Die Wirkung des Betrags ist, dass der Teil des Grafen, der unterhalb der x-Achse verläuft, an dieser gespiegelt wird.</p>

Bezug zum Lehrplan	Screenshot
<p>Inhaltliche Schwerpunkte</p> <p>Integralrechnung: Produktsumme, orientierte Fläche, Bestandsfunktion, Integralfunktion, Stammfunktion, bestimmtes Integral, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung</p> <p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <p>(11) interpretieren Produktsummen im Sachkontext als Rekonstruktion des Gesamtbestandes oder Gesamteffektes einer Größe,</p> <p>(12) deuten die Inhalte von orientierten Flächen im Kontext der Fragestellung,</p> <p>(13) skizzieren zum Graphen einer gegebenen Randfunktion den Graphen der zugehörigen Flächeninhaltsfunktion,</p> <p>(14) erläutern und vollziehen an geeigneten Beispielen den Übergang von der Produktsumme zum Integral auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs,</p>	 <p>The top screenshot is titled "Edit Aktion Interaktiv" and shows the integral <math>\int 2 \cdot x^3 - 3 \cdot x dx</math> being calculated. The result is <math>\frac{x^4 - 3 \cdot x^2}{2} + 1</math>. Below the formula is a graph showing the function <math>f(x) = 2x^3 - 3x</math> and its integral <math>F(x) = \frac{x^4 - 3x^2}{2} + 1</math>.</p> <p>The bottom screenshot is titled "Datei Edit Ansicht Zeichnen" and shows a graph with several curves and lines. The legend indicates:     <ul style="list-style-type: none"> <li>StGeradeC: -1.00</li> <li>StGeradeD: -1.00</li> <li>StGeradeE: -1.00</li> </ul>     Points A, B, C, D, and E are marked on the graph.   </p>

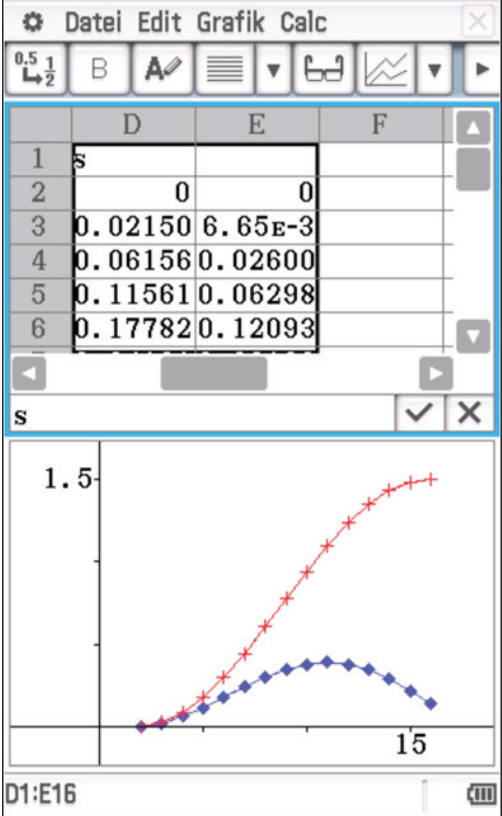
Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
<p>Das CAS des ClassPads kann natürlich Stammfunktionen bestimmen, so sie bestimmbar sind.</p> <p><i>Interaktiv -&gt; Berechnungen -&gt; </i></p> <p>Es ist dann zu entscheiden, ob eine Stammfunktion oder ein bestimmtes Integral berechnet werden soll.</p> <p>Im Bereich <i>main</i> wird das Fenster durch die Wahl von  automatisch geteilt Die Terme können dann einfach markiert und in das untere Fenster gezogen werden.</p> <p>Im Geometrie Modul lassen sich die Grafen der obigen Funktionen zeichnen. Die Punkte A und B sind so gewählt, dass die x-Koordinate = 1 gewählt ist. Die Punkte kann man zunächst beliebig setzen, um dann die Koordinaten im Messfenster zu korrigieren. Durch diese Punkte legen wir eine Gerade. Die Schnittpunkte dieser Geraden mit den Funktionsgrafem werden nicht durch Setzen eines Punktes konstruiert. Die Tangenten werden durch: <i>Zeichnen -&gt; Konstruiere -&gt; Tangente an Kurve</i> erzeugt. Wie schon erwähnt, wird der Punkt dabei automatisch erzeugt. Er lässt sich aber verschieben, nachdem er zuvor markiert wurde. Im Messfenster lässt sich beobachten, wann die x-Koordinate den Wert 1 hat. Durch Markieren der jeweiligen Tangente kann im Messfenster die Steigung angezeigt werden. Mit Hilfe des Stiftes lässt sich der Wert in das Fenster ziehen, so dass man die Werte vergleichen kann.</p>	<p>In der mathematischen Schreibweise wird im Allgemeinen ein Integrand, der aus einer Summe besteht, in Klammern gesetzt. Für das CAS des ClassPad ist dies nicht erforderlich. Die Integrationskonstante c wird automatisch gleich null gesetzt. Von daher macht es Sinn, weitere mögliche Funktionen, die sich durch eine Konstante unterscheiden, anzugeben. Das CAS ist zwar auf eine Art eine elektronische Formelsammlung. Die üblichen Integrationsregeln sind aber nicht abrufbar, wie es zum Beispiel die Regeln für das Ableiten sind.</p> <p>Ein weiterer Hinweis auf den Hauptsatz ergibt sich aus der Erkenntnis, dass Funktionsgrafem, deren Gleichung sich nur um eine Konstante unterscheiden, an der gleichen Stelle parallele Tangenten haben, das heißt die gleiche Ableitung besitzen.</p> <p>Auch wenn der Hauptsatz schon bewiesen ist, kann eine visuelle Darstellung für einige Schülerinnen und Schüler hilfreich sein, die Aussage des Hauptsatzes noch mal unter einem anderen Aspekt zu sehen.</p>

# Ein Beispiel zu Bedeutung der Integrationskonstanten

Bezug zum Lehrplan	Screenshot
<p>Inhaltliche Schwerpunkte</p> <p>Integralrechnung: Produktsumme, orientierte Fläche, Bestandsfunktion, Integralfunktion, Stammfunktion, bestimmtes Integral, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung</p> <p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <p>(11) interpretieren Produktsummen im Sachkontext als Rekonstruktion des Gesamtbestandes oder Gesamteffektes einer Größe,</p> <p>(14) erläutern und vollziehen an geeigneten Beispielen den Übergang von der Produktsumme zum Integral auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs,</p>	<div style="display: flex; flex-direction: column; align-items: center;"> <math display="block">\int \sin(x) dx = -\cos(x)</math> <math display="block">\int -\cos(x) dx = -\sin(x)</math> <math display="block">\int \cos(x) dx = \sin(x)</math> <math display="block">\int \sin(x) dx = -\cos(x)</math> </div>  <p>The screenshot shows a spreadsheet with two tables. The top table has columns labeled t, a, v, s and rows 1 through 17. The bottom table has columns labeled t, a, v, s and rows 1 through 17. The data in the tables represents numerical values for variables a, v, and s over time t.</p>

Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
<p>Wenn keine Grenzen angegeben werden, wird die Stammfunktion mit <math>c = 0</math> gebildet</p> <p><b>B3:</b> = <math>\sin(A3)</math>  <b>C3:</b> = <math>\frac{B3}{2} * 0.3 + C2</math>  <b>D3:</b> = <math>\frac{C3}{2} * 0,3 + D2</math></p> <p>Die weiteren Werte bekommt man einfach durch: markieren -&gt; kopieren -&gt; markieren -&gt; einfügen</p> <p>Für den zweiten Fall ist einfach in B3 der sin durch cos zu ersetzen. Die Kopiervorgänge müssen dann noch wiederholt werden.</p>	<p>In der Regel wird die Konstante gleich 0 gesetzt, ohne dass sich weitere Gedanken gemacht werden. Dass das nicht immer so möglich ist, soll das folgende Beispiel zeigen. Es werden Funktion <math>s(t)</math> zu zwei Beschleunigungen <math>a(t)</math> gesucht. Es gilt ja</p> $s(t) = \frac{a}{2} t^2 + v_0 t + s_0$ <p>Die obige Gleichung gilt aber nur unter der Voraussetzung <math>a = konst.</math></p> <p>Da die zwei Fälle <math>a_1 = \sin(t)</math> und <math>a_2 = \cos(t)</math> diskutiert werden sollen, kann man die obige Gleichung nicht benutzen, sondern es ist zweimal zu integrieren.</p> <p>Als reales Beispiel kann ein Kondensatorfeld dienen, in dem sich parallel zu den Platten ein Elektron bewegt. An den Platten ist eine sin- bzw. cos- förmige Spannung angelegt. Das <math>s(t)</math> bezieht sich dann auf die Ablenkung senkrecht zu den Platten.</p> <p>Wenn man zweimal integriert, erhält man als Ergebnis jeweils eine trigonometrische Funktion. Dies kann natürlich nicht richtig sein, wenn man dies mit den näherungsweisen Berechnungen in der Tabellenkalkulation vergleicht.</p> <p>Die Werte in der Tabellenkalkulation wurden erzeugt, indem zunächst die Geschwindigkeit in dem Intervall bestimmt wurde:</p> $v(0,3) = \frac{a(0,3)}{2} \cdot 0,3 \quad a(0,3) = \sin(0,3)$ $s(0,3) = \frac{v(0,3)}{2} \cdot 0,3$ <p>Entsprechend wurden die weiteren Werte berechnet und für den zweiten Fall die sin-Funktion durch die cos-Funktion ersetzt. Es ist offensichtlich, dass ein Fehler vorliegen muss. Dies lässt sich dadurch erklären, dass es im ersten Fall zwar auch eine negative Beschleunigung aber keine negative Geschwindigkeit gibt. Der kleinste Wert der Geschwindigkeit kann nur 0 betragen; das heißt der Körper bzw. das Elektron bewegt sich nur in eine Richtung. Im zweiten Fall ist das nicht der Fall.</p>

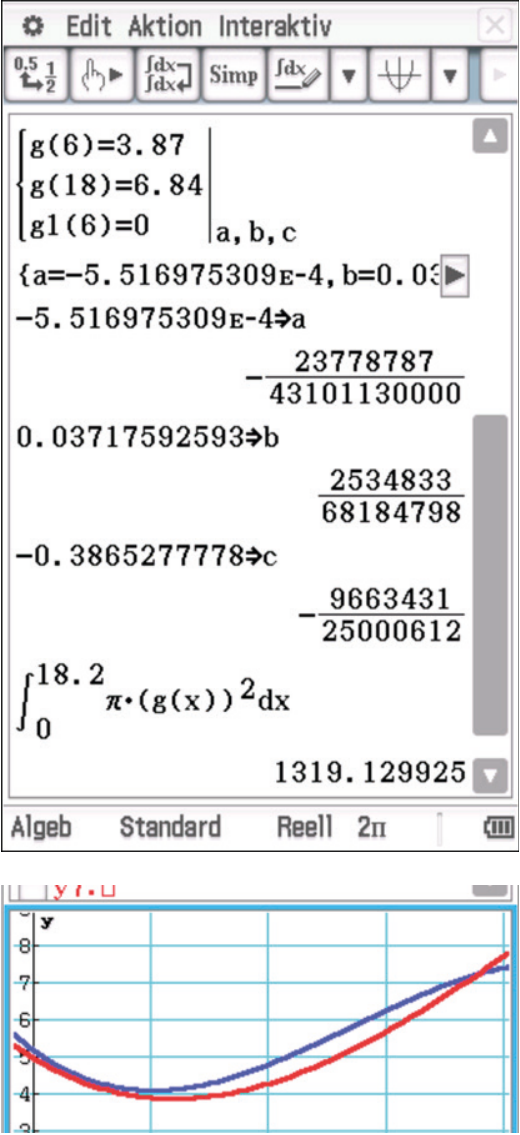
# Beispiele zur Integration ausgehend von Daten in Tabellenform

Bezug zum Lehrplan	Screenshot																																																																																								
<p>Inhaltliche Schwerpunkte</p> <p>Integralrechnung: Produktsumme, orientierte Fläche, Bestandsfunktion, Integralfunktion, Stammfunktion, bestimmtes Integral, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung</p> <p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <p>(11) interpretieren Produktsummen im Sachkontext als Rekonstruktion des Gesamtbestandes oder Gesamteffektes einer Größe,</p> <p>(14) erläutern und vollziehen an geeigneten Beispielen den Übergang von der Produktsumme zum Integral auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs,</p> <p>(14) interpretieren Produktsummen im Sachkontext als Rekonstruktion des Gesamtbestandes oder Gesamteffektes einer Größe,</p> <p>(22) ermitteln Flächeninhalte mithilfe von bestimmten Integralen und uneigentlichen Integralen sowie Volumina von Körpern, die durch die Rotation um die Abszisse entstehen (das letzte nur LK)</p>	 <p>The first screenshot shows a spreadsheet with the following data:</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>D</th> <th>E</th> <th>F</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>s</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>2</td> <td></td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td></td> <td>0.02150</td> <td>6.65E-3</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td></td> <td>0.06156</td> <td>0.02600</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td></td> <td>0.11561</td> <td>0.06298</td> </tr> <tr> <td>6</td> <td></td> <td>0.17782</td> <td>0.12093</td> </tr> </tbody> </table> <p>The second screenshot shows a spreadsheet with the following data:</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>A</th> <th>B</th> <th>C</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td></td> <td>0</td> <td>4.97</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td></td> <td>2</td> <td>4.81</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td></td> <td>4</td> <td>4.3</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td></td> <td>6</td> <td>3.87</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td></td> <td>8</td> <td>4.23</td> </tr> <tr> <td>6</td> <td></td> <td>10</td> <td>4.63</td> </tr> <tr> <td>7</td> <td></td> <td>12</td> <td>5.41</td> </tr> <tr> <td>8</td> <td></td> <td>14</td> <td>6.1</td> </tr> <tr> <td>9</td> <td></td> <td>16</td> <td>6.43</td> </tr> <tr> <td>10</td> <td></td> <td>18</td> <td>6.84</td> </tr> <tr> <td>11</td> <td></td> <td>18.2</td> <td>7</td> </tr> <tr> <td>12</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>13</td> <td></td> <td></td> <td>1531.57</td> </tr> <tr> <td>14</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>		D	E	F	1	s			2		0	0	3		0.02150	6.65E-3	4		0.06156	0.02600	5		0.11561	0.06298	6		0.17782	0.12093		A	B	C	1		0	4.97	2		2	4.81	3		4	4.3	4		6	3.87	5		8	4.23	6		10	4.63	7		12	5.41	8		14	6.1	9		16	6.43	10		18	6.84	11		18.2	7	12				13			1531.57	14			
	D	E	F																																																																																						
1	s																																																																																								
2		0	0																																																																																						
3		0.02150	6.65E-3																																																																																						
4		0.06156	0.02600																																																																																						
5		0.11561	0.06298																																																																																						
6		0.17782	0.12093																																																																																						
	A	B	C																																																																																						
1		0	4.97																																																																																						
2		2	4.81																																																																																						
3		4	4.3																																																																																						
4		6	3.87																																																																																						
5		8	4.23																																																																																						
6		10	4.63																																																																																						
7		12	5.41																																																																																						
8		14	6.1																																																																																						
9		16	6.43																																																																																						
10		18	6.84																																																																																						
11		18.2	7																																																																																						
12																																																																																									
13			1531.57																																																																																						
14																																																																																									

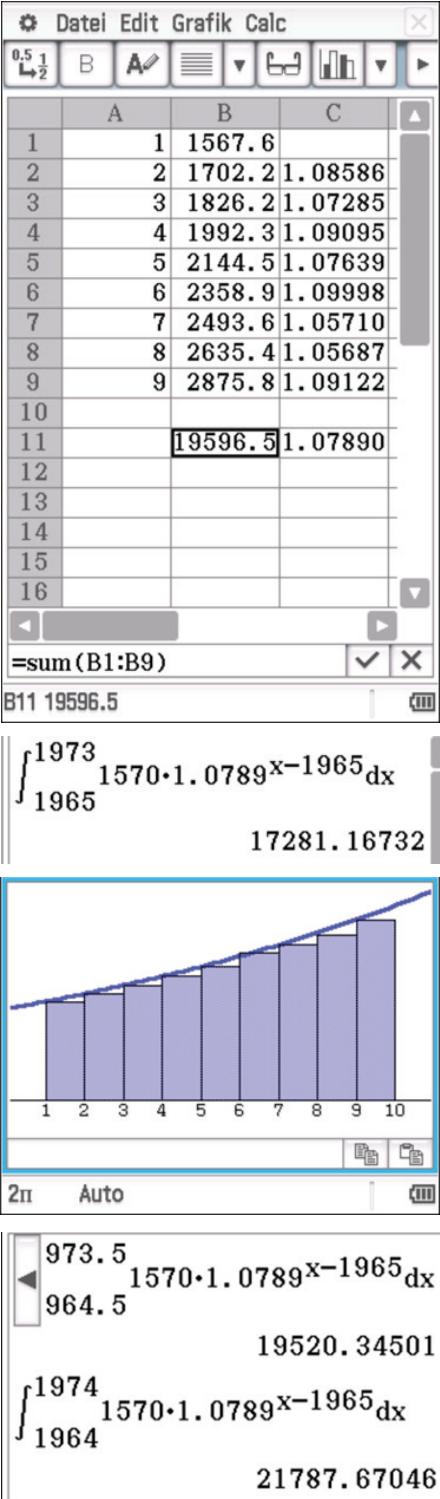
Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik																																				
<p>Für die visuelle Darstellung ist es erforderlich, dass die beiden Spalten, die dargestellt werden sollen, nebeneinanderstehen. Zwei Spalten, die nicht nebeneinanderstehen, sind nicht gleichzeitig markierbar. Auch ist eine Darstellung nacheinander nicht möglich, da die Bilder jedes Mal neu erzeugt werden. In der Abbildung links stehen die s Werte für die Beschleunigung <math>a = \sin(t)</math>. Die Spalte wurde in der entsprechenden Berechnung markiert -&gt; <i>Kopieren</i> -&gt; <i>markieren</i> -&gt; <i>Einfügen</i>. Im Gegensatz zu Excel wird hier nicht zwischen Einfügen und Werte einfügen unterschieden.</p> <p>Die Werte in Spalte B müssen direkt eingetragen werden. Die Spalte A (bis auf A11) kann man mit <i>Kopieren</i> und <i>Einfügen</i> füllen.</p> <p>C2: <math>=\pi * (A2 - A1) * (\frac{B1+B2}{2})^2</math></p>	<p>Wenn man den ersten Fall betrachtet, so soll ja <math>v(0) = 0</math> gelten. Es ist aber <math>-\cos(0) = -1</math>. Das heißt, es muss dann gelten: <math>v(t) = 1 - \cos(t)</math>. Dann erhält man aber als Stammfunktion: <math>s(t) = t - \sin(t)</math>. Es gilt <math>s(0) = 0</math>. An diesem Beispiel wird deutlich, dass eine Integrationskonstante zu berücksichtigen ist. Der ClassPad gibt hier keinen Hinweis. Des Weiteren ist es für die Schülerinnen und Schüler hilfreich, dass Rekonstruktionen von Beständen rein numerisch ohne Benutzung von Integralen bestimmt werden. So lässt sich dem Missverständnis vorbeugen, dass Bestände nur noch mit dem Integral Kalkül berechnet werden können. Für einige Schülerinnen ist es sicher hilfreich, die Werte zu visualisieren. Des Weiteren wird dadurch auch deutlich, wie der weitere Verlauf der Grafen aussieht, wodurch die oben gewonnenen Funktionsgleichungen nochmal bestätigt werden.</p> <p>Gegeben sind die folgenden Daten einer Vase, die aus 2 Kegelstümpfen zusammengesetzt ist.</p> <table border="1" data-bbox="810 1368 1374 1854"> <thead> <tr> <th>Höhe</th> <th>Umfang</th> <th>Radius</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>31,2</td><td>4,97</td></tr> <tr><td>2</td><td>30,2</td><td>4,81</td></tr> <tr><td>4</td><td>27</td><td>4,30</td></tr> <tr><td>6</td><td>24,3</td><td>3,87</td></tr> <tr><td>8</td><td>26,6</td><td>4,23</td></tr> <tr><td>10</td><td>29,1</td><td>4,63</td></tr> <tr><td>12</td><td>34</td><td>5,41</td></tr> <tr><td>14</td><td>38,3</td><td>6,10</td></tr> <tr><td>16</td><td>40,4</td><td>6,43</td></tr> <tr><td>18</td><td>43</td><td>6,84</td></tr> <tr><td>18,2</td><td>44</td><td>7,0</td></tr> </tbody> </table>	Höhe	Umfang	Radius	0	31,2	4,97	2	30,2	4,81	4	27	4,30	6	24,3	3,87	8	26,6	4,23	10	29,1	4,63	12	34	5,41	14	38,3	6,10	16	40,4	6,43	18	43	6,84	18,2	44	7,0
Höhe	Umfang	Radius																																			
0	31,2	4,97																																			
2	30,2	4,81																																			
4	27	4,30																																			
6	24,3	3,87																																			
8	26,6	4,23																																			
10	29,1	4,63																																			
12	34	5,41																																			
14	38,3	6,10																																			
16	40,4	6,43																																			
18	43	6,84																																			
18,2	44	7,0																																			

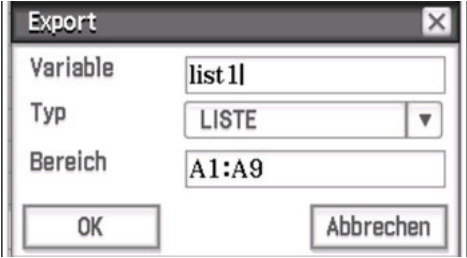

Bezug zum Lehrplan	Screenshot												
<p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <p>(14) interpretieren Produktsummen im Sachkontext als Rekonstruktion des Gesamtbestandes oder Gesamteffektes einer Größe,</p> <p>(22) ermitteln Flächeninhalte mithilfe von bestimmten Integralen und uneigentlichen Integralen sowie Volumina von Körpern, die durch die Rotation um die Abszisse entstehen (das letzte nur LK)</p>	<table border="1" data-bbox="815 302 1321 723"> <tr><td>a</td><td>-1.4E-3</td></tr> <tr><td>b</td><td>0.05706</td></tr> <tr><td>c</td><td>-0.4708</td></tr> <tr><td>d</td><td>5.19152</td></tr> <tr><td>r<sup>2</sup></td><td>0.97095</td></tr> <tr><td>MSe</td><td>0.05051</td></tr> </table> <div data-bbox="815 741 1337 1590"> </div> <div data-bbox="815 1608 1337 1854"> <pre>define f(x)=-1.4*10^-3x^3+ done ∫<sub>0</sub><sup>18.2</sup> π·(f(x))<sup>2</sup>dx 1535.165416</pre> </div>	a	-1.4E-3	b	0.05706	c	-0.4708	d	5.19152	r <sup>2</sup>	0.97095	MSe	0.05051
a	-1.4E-3												
b	0.05706												
c	-0.4708												
d	5.19152												
r <sup>2</sup>	0.97095												
MSe	0.05051												

Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
<p>Die Regression lässt sich direkt in der Tabellenkalkulation durchführen. Dazu sind zunächst die Spalten A und B zu markieren. <i>Calc -&gt; Regression -&gt; Kubische Reg.</i></p> <p>Wenn man die visuelle Darstellung ebenfalls haben möchte, muss zunächst nach der Markierung  gewählt werden und danach <i>Calc</i>. Die Daten (Tabelle oben links) erhält man durch Betätigung der Ausgabe Taste.</p> <p>Die Koeffizienten lassen sich einzeln in den Bereich <i>main</i> hinüber kopieren.</p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Bestimmen Sie näherungsweise das Volumen</li> <li>2. Bestimmen Sie eine Randfunktion und unter Verwendung dieser das Volumen der Vase.</li> </ol> <p>Aus den Daten lässt sich das Volumen näherungsweise bestimmen. Die Form wird in die vorgegebenen Abschnitte unterteilt und als zylindrisch mit einem gemittelten Radius angenommen. Für die Schülerinnen und Schüler ist es nützlich nochmals solche Rechnungen, ohne die Randfunktion durchzuführen.</p> <p>Für die Bestimmung der Randfunktion gibt es verschiedene Möglichkeiten. Wenn man den ClassPad nutzt, ist es natürlich am einfachsten, die Regression zu nutzen. Dazu muss noch die Entscheidung getroffen werden, welchen Funktionstyp man wählt. Wir schlagen eine kubische Regression vor.</p> <p>Die Daten zeigen, dass die Werte durch die Regression ganz gut repräsentiert werden (<math>r^2</math> ist nahe bei 1).</p> <p>Auch die beiden Näherungen für das Volumen zeigen eine ganz gute Übereinstimmung. Alternativ könnte man mit ausgewählten Werten den Funktionsterm der Randfunktion bestimmen.</p> <p>Möglich wäre:</p> $f(0)=4,97$ $f(6)=3,87$ $f(18,2)=7$ $f'(6)=0$ <p>Als Ansatz wählen wir:</p> $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 4,97$

Bezug zum Lehrplan	Screenshot
<p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <p>(14) interpretieren Produktsummen im Sachkontext als Rekonstruktion des Gesamtbestandes oder Gesamteffektes einer Größe,</p> <p>(22) ermitteln Flächeninhalte mithilfe von bestimmten Integralen und uneigentlichen Integralen sowie Volumina von Körpern, die durch die Rotation um die Abszisse entstehen (das letzte nur LK)</p>	 <p>The screenshot shows a CAS calculator interface with the following content:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Header: Edit Aktion Interaktiv</li> <li>Input area:       <math display="block">\begin{cases} g(6)=3.87 \\ g(18)=6.84 \\ g'(6)=0 \end{cases} \quad   \quad a, b, c</math> </li> <li>Output area:       <math display="block">\begin{aligned} &amp;\{a=-5.516975309E-4, b=0.03717592593, c=-0.3865277778\} \\ &amp;-5.516975309E-4 \Rightarrow a \\ &amp;\quad \frac{23778787}{43101130000} \\ &amp;0.03717592593 \Rightarrow b \\ &amp;\quad \frac{2534833}{68184798} \\ &amp;-0.3865277778 \Rightarrow c \\ &amp;\quad \frac{9663431}{25000612} \end{aligned}</math> </li> <li>Integral calculation:       <math display="block">\int_0^{18.2} \pi \cdot (g(x))^2 dx = 1319.129925</math> </li> <li>Bottom menu: Algeb Standard Reell 2π</li> <li>Graph: A coordinate system showing two curves, one blue and one red, plotted on a grid. The y-axis ranges from -2 to 8, and the x-axis ranges from 0 to 18.2.</li> </ul>

Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
<p>Die Werte a, b und c wurden berechnet, sind aber noch nicht in den Variablen abgelegt. Dies geschieht in den folgenden Zeilen durch Benutzung des Zuordnungspfeils. Alternativ hätte man die Funktionsgleichung durch Benutzung des Kopiermodus aufstellen können.</p>	<p>Der obige Ansatz führt zu einem 3x3 Gleichungssystem.</p> <p>Man erkennt, dass der Wert für das Volumen deutlich von den beiden anderen Werten abweicht. Warum das so ist, liegt daran, dass der Graf der zweiten Funktion deutlich unterhalb von dem der ersten verläuft. Alternativ hätte man auch andere Daten benutzen können, wobei aber letztlich nicht zu erwarten ist, ein besseres Ergebnis als das durch die Regression erzielte zu erreichen. Die Regression in der Tabellenkalkulation ist für die Schülerinnen und Schüler eine Black Box, wenn Regression nicht Bestandteil des Unterrichts ist, was ja nach Lehrplan nicht der Fall ist. Es besteht aber die Möglichkeit, kubische Regressionsgleichungen direkt zu bestimmen, indem folgende Funktionen aufgestellt werden:</p> $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ $h(a, b, c, d) = (f(0) - 4,97)^2 + \dots + (f(18,2) - 7)^2$ <p>Danach sind die Ableitungen nach a, b, c und d zu bilden und das Gleichungssystem:</p> $\frac{d h(a, b, c, d)}{da} = 0 \quad \frac{d h(a, b, c, d)}{db} = 0$ $\frac{d h(a, b, c, d)}{dc} = 0 \quad \frac{d h(a, b, c, d)}{dd} = 0$ <p>zu lösen. Die umfangreichen Rechnungen findet man im Anhang. Dort erkennt man, dass die errechneten Koeffizienten leicht von denen der in der Tabellenkalkulation durchgeführten Regression abweichen. Eine Erklärung könnten Fehler im numerischen Verfahren sein.</p>

Bezug zum Lehrplan	Screenshot																																																																				
<p>Inhaltliche Schwerpunkte</p> <p>Integralrechnung: Produktsumme, orientierte Fläche, Bestandsfunktion, Integralfunktion, Stammfunktion, bestimmtes Integral, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung</p> <p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <p>(2) nutzen die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, der Sinusfunktion, der Kosinusfunktion, der Potenzfunktionen, <math>\sqrt{x}</math> und <math>\frac{1}{x}</math> sowie der Transformationen dieser Funktionen zur Beantwortung von Fragestellungen,</p> <p>(14) interpretieren Produktsummen im Sachkontext als Rekonstruktion des Gesamtbestandes oder Gesamteffektes einer Größe,</p>	 <p>The screenshot shows a spreadsheet application window titled 'Datei Edit Grafik Calc'. The spreadsheet has columns A, B, and C. The data in column B is as follows:</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Row</th> <th>Column A</th> <th>Column B</th> <th>Column C</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1567.6</td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td><td>1702.2</td><td>1.08586</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td><td>1826.2</td><td>1.07285</td></tr> <tr><td>4</td><td>4</td><td>1992.3</td><td>1.09095</td></tr> <tr><td>5</td><td>5</td><td>2144.5</td><td>1.07639</td></tr> <tr><td>6</td><td>6</td><td>2358.9</td><td>1.09998</td></tr> <tr><td>7</td><td>7</td><td>2493.6</td><td>1.05710</td></tr> <tr><td>8</td><td>8</td><td>2635.4</td><td>1.05687</td></tr> <tr><td>9</td><td>9</td><td>2875.8</td><td>1.09122</td></tr> <tr><td>10</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>11</td><td></td><td>19596.5</td><td>1.07890</td></tr> <tr><td>12</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>13</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>14</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>15</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>16</td><td></td><td></td><td></td></tr> </tbody> </table> <p>Below the spreadsheet, the formula bar shows <math>=\text{sum}(B1:B9)</math> and the status bar shows 'B11 19596.5'. Below the spreadsheet, there are two integral calculations:</p> $\int_{1965}^{1973} 1570 \cdot 1.0789^x - 1965 dx = 17281.16732$ $\int_{1964}^{1974} 1570 \cdot 1.0789^x - 1965 dx = 21787.67046$ <p>A bar chart is also visible, showing a series of bars increasing in height from left to right, with a blue line representing a linear trend.</p>	Row	Column A	Column B	Column C	1	1	1567.6		2	2	1702.2	1.08586	3	3	1826.2	1.07285	4	4	1992.3	1.09095	5	5	2144.5	1.07639	6	6	2358.9	1.09998	7	7	2493.6	1.05710	8	8	2635.4	1.05687	9	9	2875.8	1.09122	10				11		19596.5	1.07890	12				13				14				15				16			
Row	Column A	Column B	Column C																																																																		
1	1	1567.6																																																																			
2	2	1702.2	1.08586																																																																		
3	3	1826.2	1.07285																																																																		
4	4	1992.3	1.09095																																																																		
5	5	2144.5	1.07639																																																																		
6	6	2358.9	1.09998																																																																		
7	7	2493.6	1.05710																																																																		
8	8	2635.4	1.05687																																																																		
9	9	2875.8	1.09122																																																																		
10																																																																					
11		19596.5	1.07890																																																																		
12																																																																					
13																																																																					
14																																																																					
15																																																																					
16																																																																					

Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik																		
<p>Die Spalten A und B wurden direkt übertragen. In Spalte C stehen die Quotienten, die sich aus zwei aufeinander folgenden Werten aus Spalte B ergeben. Den Mittelwert in C11 erhält man mit <i>Calc -&gt; Listenstatistik -&gt; mean</i></p> <p>In B11 ist die Summe der Werte von B1 bis B9 angegeben. B11: =sum(B1:B9)</p> <p>Um das Bild links zu erzeugen, werden die Spalten A und B in Listen transformiert und in das Statistik Modul übertragen: <i>Datei -&gt; Export</i></p>  <p>Entsprechendes macht man mit der Spalte B, nachdem sie markiert wurde.</p> <p>In der <i>Statistik</i> wählt man  und darin <i>Histogramm list1</i> und <i>list2</i></p> <p>Damit auch ein Funktionsgraf gezeichnet wird, ist eine Regression durchzuführen <i>Calc -&gt; Regressionen -&gt; Exp. Regression</i></p>	<p>Gegeben ist folgende Tabelle, die die Ölfördermenge in Millionen von Tonnen angibt.</p> <table border="1" data-bbox="810 398 1375 551"> <thead> <tr> <th>Jahr Prod.</th> <th>Jahr Prod.</th> <th>Jahr Prod.</th> <th>Jahr Prod.</th> <th>Jahr Prod.</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1965 1.567,6</td> <td>1966 1.702,2</td> <td>1967 1.826,2</td> <td>1968 1.992,3</td> <td>1969 2.144,5</td> </tr> </tbody> </table> <table border="1" data-bbox="810 584 1375 723"> <thead> <tr> <th>Jahr Prod.</th> <th>Jahr Prod.</th> <th>Jahr Prod.</th> <th>Jahr Prod.</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1970 2.358,9</td> <td>1971 2.493,6</td> <td>1972 2.635,4</td> <td>1973 2.875,8</td> </tr> </tbody> </table> <p>Zu zeigen ist, dass es sich um exponentielles Wachstum handelt. Aus der Tabelle links geht hervor, dass ein Ansatz für exponentielles Wachstum mit einem jährlichen Wachstumsfaktor von ca. 7,9% für den angegebenen Zeitraum möglich ist. Als Funktionsgleichung ergibt sich dann:</p> $f(t) = 1570 \cdot 1,0789^{(t-1965)}$ <p>Bildet man das Integral über den Zeitraum, so erkennt man, dass der Wert deutlich zu klein ist. Dies liegt daran, dass der Zeitraum falsch gewählt ist. Das Bild links verdeutlicht das. Wenn man nur die Fläche unter der Kurve bis zum x-Wert 9 berechnet, fehlt ein Rechteck. Das bedeutet, die Grenzen beim Integral sind anders zu setzen.</p> <p>Es zeigt sich, dass es am geeignetsten ist die untere Grenze um 0,5 zu verkleinern und die obere um 0,5 zu vergrößern.</p> <p>Wir hätten auch eine Regression durchführen können, haben aber an dieser Stelle bewusst darauf verzichtet.</p>	Jahr Prod.	Jahr Prod.	Jahr Prod.	Jahr Prod.	Jahr Prod.	1965 1.567,6	1966 1.702,2	1967 1.826,2	1968 1.992,3	1969 2.144,5	Jahr Prod.	Jahr Prod.	Jahr Prod.	Jahr Prod.	1970 2.358,9	1971 2.493,6	1972 2.635,4	1973 2.875,8
Jahr Prod.	Jahr Prod.	Jahr Prod.	Jahr Prod.	Jahr Prod.															
1965 1.567,6	1966 1.702,2	1967 1.826,2	1968 1.992,3	1969 2.144,5															
Jahr Prod.	Jahr Prod.	Jahr Prod.	Jahr Prod.																
1970 2.358,9	1971 2.493,6	1972 2.635,4	1973 2.875,8																

# Anhang

## Herleitung der allgemeinen Gleichung zur Bestimmung der Krümmung von Funktionsgraphen

Aus den beiden Beispielen lassen sich allgemeine Gleichungen zur Bestimmung des Kreises herleiten. Gesucht sei der Kreis, der sich dem Funktionsgraphen einer gegebenen Funktion  $f$  an der Stelle  $x_0$  optimal anschmiegt. Es ist offensichtlich, dass der Punkt  $(x_0/f(x_0))$  sowohl ein Punkt des Funktionsgraphen als auch des gesuchten Kreises sein muss. Das heißt:

$$(x_0 - x_M)^2 + (f(x_0) - y_M)^2 = r^2$$

Wegen der optimalen Anpassung müssen auch die Steigungen des Kreises und des Funktionsgraphen gleich sein. Für die Bestimmung des Radius im ersten Beispiel haben wir die Nullstelle der 2. Ableitung der Differenzfunktion bestimmt; das heißt auch die 2. Ableitungen müssen übereinstimmen. Zur Vereinfachung sei der Mittelpunkt des Kreises  $M(m/n)$ .

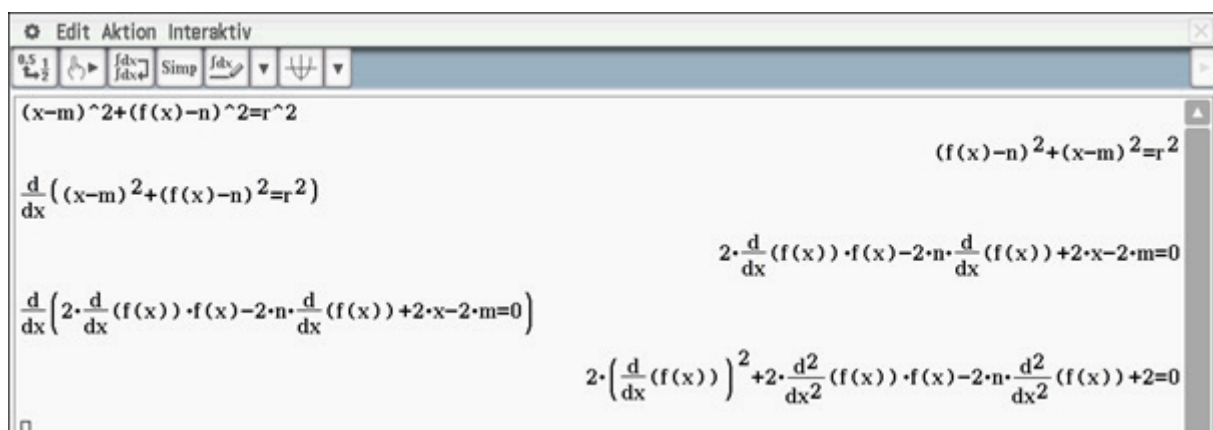


Abb. 1 Bestimmung der Ableitungen

Die letzte Gleichung lässt sich nach  $n$  auflösen.

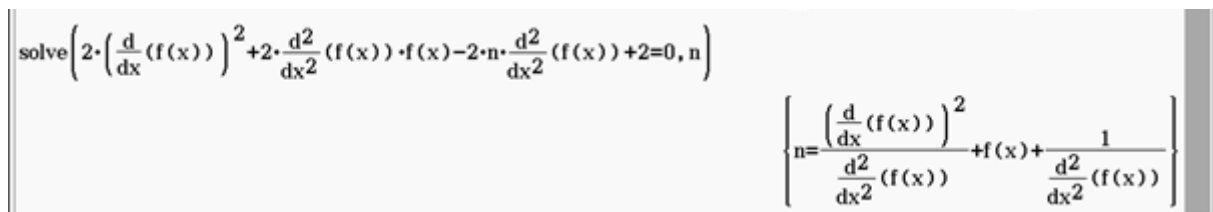


Abb. 2 Bestimmung von  $y_M$

Die weiteren Umformungen lassen sich alle mit dem ClassPad durchführen. Es wird der Wert für  $n$  in die zweite Gleichung eingesetzt und diese dann nach  $m$  aufgelöst. Die so erhaltenen Werte für den Kreismittelpunkt setzen wir dann in die Ausgangsgleichung ein, um einen Wert für den Radius zu erhalten. Zu beachten ist, dass durch das Auflösen nach der Variablen  $n$  ja noch nicht der entsprechende Wert zugewiesen worden ist. Dies muss mit Hilfe des Zuordnungspfeils noch extra geschehen. Die folgenden Abbildungen zeigen die entsprechenden Rechnungen.

Edit Aktion Interaktiv

$$\frac{\left(\frac{d}{dx}(f(x))\right)^2}{\frac{d^2}{dx^2}(f(x))} + f(x) + \frac{1}{\frac{d^2}{dx^2}(f(x))} \rightarrow n$$

$$2 \cdot \frac{d}{dx}(f(x)) \cdot f(x) - 2 \cdot n \cdot \frac{d}{dx}(f(x)) + 2 \cdot x - 2 \cdot m = 0$$

$$-2 \cdot \left( \frac{\left(\frac{d}{dx}(f(x))\right)^2}{\frac{d^2}{dx^2}(f(x))} + f(x) + \frac{1}{\frac{d^2}{dx^2}(f(x))} \right) \cdot \frac{d}{dx}(f(x)) + 2 \cdot \frac{d}{dx}(f(x)) \cdot f(x) + 2 \cdot x - 2 \cdot m = 0$$

$$\text{solve} \left( -2 \cdot \left( \frac{\left(\frac{d}{dx}(f(x))\right)^2}{\frac{d^2}{dx^2}(f(x))} + f(x) + \frac{1}{\frac{d^2}{dx^2}(f(x))} \right) \cdot \frac{d}{dx}(f(x)) + 2 \cdot \frac{d}{dx}(f(x)) \cdot f(x) + 2 \cdot x - 2 \cdot m = 0, m \right)$$

$$m = \frac{-\left(\left(\frac{d}{dx}(f(x))\right)^3 - x \cdot \frac{d^2}{dx^2}(f(x)) + \frac{d}{dx}(f(x))\right)}{\frac{d^2}{dx^2}(f(x))}$$

$$-\left(\frac{\left(\frac{d}{dx}(f(x))\right)^3 - x \cdot \frac{d^2}{dx^2}(f(x)) + \frac{d}{dx}(f(x))}{\frac{d^2}{dx^2}(f(x))}\right) \rightarrow m$$

$$\frac{-\left(\left(\frac{d}{dx}(f(x))\right)^3 - x \cdot \frac{d^2}{dx^2}(f(x)) + \frac{d}{dx}(f(x))\right)}{\frac{d^2}{dx^2}(f(x))}$$

$$(x-m)^2 + (f(x)-n)^2 = r^2$$

$$\left(\frac{\left(\frac{d}{dx}(f(x))\right)^3 - x \cdot \frac{d^2}{dx^2}(f(x)) + \frac{d}{dx}(f(x))}{\frac{d^2}{dx^2}(f(x))} + x\right)^2 + \left(\frac{\left(\frac{d}{dx}(f(x))\right)^2}{\frac{d^2}{dx^2}(f(x))} + \frac{1}{\frac{d^2}{dx^2}(f(x))}\right)^2 = r^2$$

$$\text{simplify} \left( \left(\frac{\left(\frac{d}{dx}(f(x))\right)^3 - x \cdot \frac{d^2}{dx^2}(f(x)) + \frac{d}{dx}(f(x))}{\frac{d^2}{dx^2}(f(x))} + x\right)^2 + \left(\frac{\left(\frac{d}{dx}(f(x))\right)^2}{\frac{d^2}{dx^2}(f(x))} + \frac{1}{\frac{d^2}{dx^2}(f(x))}\right)^2 = r^2 \right)$$

$$\frac{\left(\left(\frac{d}{dx}(f(x))\right)^2 + 1\right)^3}{\left(\frac{d^2}{dx^2}(f(x))\right)^2} = r^2$$

$$\text{solve} \left( \frac{\left(\left(\frac{d}{dx}(f(x))\right)^2 + 1\right)^3}{\left(\frac{d^2}{dx^2}(f(x))\right)^2} = r^2, r \right)$$

$$r = \frac{-\left(\left(\frac{d}{dx}(f(x))\right)^2 + 1\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2}{dx^2}(f(x))}, r = \frac{\left(\left(\frac{d}{dx}(f(x))\right)^2 + 1\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2}{dx^2}(f(x))}$$

Algeb Standard Reell 360°

Abb. 3 Bestimmung des Radius

Von den beiden Lösungen aus Abbildung 3 interessiert uns natürlich nur die zweite. Man erkennt den üblichen Ausdruck. Anzumerken ist, dass wir  $f''(x) \neq 0$  und die zweimalige stetige Differenzierbarkeit für die Funktion  $f$  vorausgesetzt haben.

## Berechnung der Regression Seite 19

$y = 1.468E-4x^3 - 0.04368x^2 + 7.63x + 1018$

$y = \frac{367x^3}{2500000} - \frac{273x^2}{6250} + \frac{763x}{100} + 1018$

```

define f(a, b, c, d, x) = a*x^3 + b*x^2 + c*x + d
done
define g(a, b, c, d) = ((f(a, b, c, d, 0) - 1000)^2 + (f(a, b, c, d, 25) - 1180)^2 + (f(a, b, c, d, 50) - 1340)^2 + (f(a, b, c, d, 75) - 1390)^2 + (f(a, b, c, d, 100) - 1550)^2 + (f(a, b, c, d, 125) - 1585)^2 + (f(a, b, c, d, 150) - 1610)^2)
done
d
da (g(a, b, c, d))
953125*a + 15625*b + 125*c + d - 1585 + 2000000*(1000000*a + 10000*b + 100*c + d - 1550) + 843750*(421875*a + 5625*b + 75*c + d - 1390) + 250000*(125000*a + 2500*b + 50*c + d - 1340) + 31250*(15625*a + 625*b + 25*c + d - 1180)
d
db (g(a, b, c, d))
250*(1953125*a + 15625*b + 125*c + d - 1585) + 20000*(1000000*a + 10000*b + 100*c + d - 1550) + 11250*(421875*a + 5625*b + 75*c + d - 1390) + 5000*(125000*a + 2500*b + 50*c + d - 1340) + 1250*(15625*a + 625*b + 25*c + d - 1180)
d
dc (g(a, b, c, d))
-1610 + 250*(1953125*a + 15625*b + 125*c + d - 1585) + 200*(1000000*a + 10000*b + 100*c + d - 1550) + 150*(421875*a + 5625*b + 75*c + d - 1390) + 100*(125000*a + 2500*b + 50*c + d - 1340) + 50*(15625*a + 625*b + 25*c + d - 1180)
d
dd (g(a, b, c, d))
1610 + 2*(1953125*a + 15625*b + 125*c + d - 1585) + 2*(1000000*a + 10000*b + 100*c + d - 1550) + 2*(421875*a + 5625*b + 75*c + d - 1390) + 2*(125000*a + 2500*b + 50*c + d - 1340) + 2*(15625*a + 625*b + 25*c + d - 1180) + 2*(d - 1000)
54000000*(27000000*a + 900000*b + 300*c + d - 3270) + 41593750*(20796875*a + 75625*b + 275*c + d - 2920) + 31250000*(15625000*a + 62500*b + 250*c + d - 2590) + 22781250*(11390625*a + 50625*b + 225*c + d - 2180) + 16000000*(27000000*a + 900000*b + 300*c + d - 3270) + 151250*(20796875*a + 75625*b + 275*c + d - 2920) + 125000*(15625000*a + 62500*b + 250*c + d - 2590) + 101250*(11390625*a + 50625*b + 225*c + d - 2180) + 80000*(800000*(27000000*a + 900000*b + 300*c + d - 3270) + 550*(20796875*a + 75625*b + 275*c + d - 2920) + 500*(15625000*a + 62500*b + 250*c + d - 2590) + 450*(11390625*a + 50625*b + 225*c + d - 2180) + 400*(8000000*a + 400000*b + 200*c + d - 1890) + 2*(27000000*a + 900000*b + 300*c + d - 3270) + 2*(20796875*a + 75625*b + 275*c + d - 2920) + 2*(15625000*a + 62500*b + 250*c + d - 2590) + 2*(11390625*a + 50625*b + 225*c + d - 2180) + 2*(8000000*a + 400000*b + 200*c + d - 1890) + 2*(d - 1000))
(a = 1.467599068E-4, b = -0.04368431568, c = 7.63005328, d = 1017.82967)

```

Algeb Standard Reell 360

# Berechnung der Regression Seite 56

```

Edit Aktion Interaktiv
define f(x)=ax^3+bx^2+cx+d
define h(a,b,c,d)=(f(0)-4.97)^2+(f(2)-4.81)^2+(f(4)-4.3)^2+(f(6)-3.87)^2+(f(8)-4.23)^2+(f(10)-4.63)^2+(f(12)-5.41)^2+(f(14)-6.10)^2+(f(16)-6.43)^2+(f(18)-6.84)^2+(f(20)-7)^2
done

d(h(a,b,c,d))
da
1507142*(753571*a+8281*b+91*c+d-7)/125+11664*(5832*a+324*b+18*c+d-171)/25+8192*(4096*a+256*b+16*c+d-643)/100+5488*(2744*a+196*b+14*c+d-61)/10+3456*(1728*a+144*b+12*c+d-541)/100+2000*(1000*a+1000)
done

define ha(a,b,c,d)=1507142*(753571*a+8281*b+91*c+d-7)/125+11664*(5832*a+324*b+18*c+d-171)/25+8192*(4096*a+256*b+16*c+d-643)/100+5488*(2744*a+196*b+14*c+d-61)/10+3456*(1728*a+144*b+12*c+d-541)/100
done

d(h(a,b,c,d))
db
16562*(753571*a+8281*b+91*c+d-7)/25+648*(5832*a+324*b+18*c+d-171)/25+512*(4096*a+256*b+16*c+d-643)/100+392*(2744*a+196*b+14*c+d-61)/10+288*(1728*a+144*b+12*c+d-541)/100+200*(1000*a+1000+b+10*c+d)
done

define hb(a,b,c,d)=16562*(753571*a+8281*b+91*c+d-7)/25+648*(5832*a+324*b+18*c+d-171)/25+512*(4096*a+256*b+16*c+d-643)/100+392*(2744*a+196*b+14*c+d-61)/10+288*(1728*a+144*b+12*c+d-541)/100+200*(1000*a+1000+b+10*c+d)
done

d(h(a,b,c,d))
dc
182*(753571*a+8281*b+91*c+d-7)/5+36*(5832*a+324*b+18*c+d-171)/25+32*(4096*a+256*b+16*c+d-643)/100+28*(2744*a+196*b+14*c+d-61)/10+24*(1728*a+144*b+12*c+d-541)/100+20*(1000*a+1000+b+10*c+d-463)/100+10000
done

define hc(a,b,c,d)=182*(753571*a+8281*b+91*c+d-7)/5+36*(5832*a+324*b+18*c+d-171)/25+32*(4096*a+256*b+16*c+d-643)/100+28*(2744*a+196*b+14*c+d-61)/10+24*(1728*a+144*b+12*c+d-541)/100+20*(1000*a+1000+b+10*c+d-463)/100+10000
done

d(h(a,b,c,d))
dd
2*(753571*a+8281*b+91*c+d-7)/5+2*(5832*a+324*b+18*c+d-171)/25+2*(4096*a+256*b+16*c+d-643)/100+2*(2744*a+196*b+14*c+d-61)/10+2*(1728*a+144*b+12*c+d-541)/100+2*(1000*a+1000+b+10*c+d-463)/100+2*(512*a+6144)
done

define hd(a,b,c,d)=2*(753571*a+8281*b+91*c+d-7)/5+2*(5832*a+324*b+18*c+d-171)/25+2*(4096*a+256*b+16*c+d-643)/100+2*(2744*a+196*b+14*c+d-61)/10+2*(1728*a+144*b+12*c+d-541)/100+2*(1000*a+1000+b+10*c+d-463)/100+2*(512*a+6144)
done

|ha(a,b,c,d)=0|
|hb(a,b,c,d)=0|
|hc(a,b,c,d)=0|
|hd(a,b,c,d)=0|a,b,c,d

{a=-1.510822179e-3,b=0.06014965188,c=-0.5009712522,d=5.271003852}

```

# Arbeitsblatt

1. Gegeben ist:  $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d$

Verändern Sie jeweils die Variablen und diskutieren Sie den Einfluss dieser auf den jeweiligen Grafen.

Welche Werte müssen die Variablen einnehmen, so dass der Graf identisch mit dem Grafen von  $g(x)=\cos(x)$  identisch ist?

2. Gegeben sind die Funktionen  $f(x) = x^4 - a \cdot x^2 - b$  und  $g(x) = x^2 - a \cdot x - b$

Welcher Zusammenhang besteht zwischen diesen beiden Funktionen?

Welche gemeinsame Eigenschaft haben die beiden Grafen der Funktionen?

3. Ein Unternehmen ermittelt folgende Kosten bezogen auf die jeweilige Produktionsmenge:

Produktionsmenge	Kosten
0	1000
25	1180
50	1340
75	1390
100	1550
125	1585
150	1610
175	1810
200	1890
225	2180
250	2590
275	2920
300	3270

Ermitteln Sie eine Kostenfunktion und bestimmen die Produktionsmenge, ab der die Kosten von einem degressiven (die Steigung nimmt ab) zu einem progressive Steigung nimmt zu) Wachstum übergehen. Begründen Sie, dass man eine Funktion dritten Grades als Ansatz wählen kann.

4. Optimierung bei der Sterilisation von Lebensmitteln

Um Lebensmittel haltbar zu machen, ist es erforderlich, dass diese erhitzt werden, um die Mikroorganismen auf das  $10^{-7}$ -fache zu reduzieren und gleichzeitig möglichst viele Nährstoffe zu erhalten. Der temperaturresistenteste Mikroorganismus in einer Fleischkonserve ist das Bakterium Clostridium Botulinum, der temperaturanfälligste Nährstoff, der erhalten bleiben soll, ist das Vitamin Thiamin (Vitamin B1). Sie zerfallen nachfolgenden Funktionen:

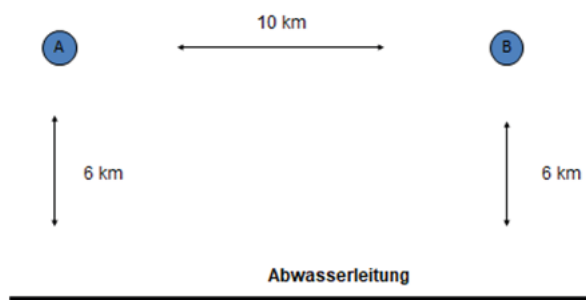
Vitamin: 
$$f_T(t) = a_0 \cdot e^{-(5,7190 \cdot 10^{11} \cdot e^{-\frac{14003}{T}}) \cdot t}$$

Bakterium: 
$$g_T(t) = b_0 \cdot e^{-(2,0468 \cdot 10^{38} \cdot e^{-\frac{35792}{T}}) \cdot t}$$

$a_0$  und  $b_0$  geben jeweils die Ausgangsmassen an.  $T$  gibt die Temperatur in K und  $t$  die Zeit in s an. Das Problem besteht nun darin, eine optimale Temperatur und Zeit für die Sterilisation zu finden.

Klären Sie den Sachverhalt. Dazu kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass  $a_0 = b_0 = 1$  ist.

5. Extremwertproblem: Abwasser: Zwei Orte, die 10 km voneinander entfernt liegen, sollen an eine zentrale Abwasserleitung angeschlossen werden. Diese verläuft in 6 km Entfernung parallel zur Verbindungslinie der beiden Orte. Aus Kostengründen ist nur ein einziger Anschluss an diese zentrale Leitung möglich. Um sich einen Überblick zu verschaffen, ist es hilfreich, zunächst eine Zeichnung anzufertigen. (s. Abb. unten)



Bestimmen Sie die Stelle, an der die beiden von den Orten A und B ausgehenden Leitungen zusammengeführt werden müssen, damit die gesamte Länge der Leitungen minimal ist.

6. Gegeben sind die folgenden Daten einer Vase, die aus 2 Kegelstümpfen zusammengesetzt ist.

Höhe	Umfang	Radius
0	31,2	4,97
2	30,2	4,81
4	27	4,30
6	24,3	3,87
8	26,6	4,23
10	29,1	4,63
12	34	5,41
14	38,3	6,10
16	40,4	6,43
18	43	6,84
18,2	44	7,0

a) Bestimmen Sie näherungsweise das Volumen.

b) Bestimmen Sie eine Randfunktion und unter Verwendung dieser das Volumen der Vase.

7. Die folgende Tabelle gibt den Welterdölverbrauch in den Jahren von 1880 bis 1925 in Millionen Barrel.

Jahr	1880	1890	1900	1905	1910	1915	1920	1925
Ölverbr.	30	77	149	215	328	432	689	1069

a) Erstellen Sie zur obigen Tabelle einen Graphen. Zeigen Sie, dass die obigen Werte durch eine Funktion der Art  $f(t) = a \cdot e^{b \cdot t}$  darstellen lassen und geben Sie Werte für  $a$  und  $b$  an.

b) Funktion der Art  $f(t) = a \cdot e^{b \cdot t}$  beschreiben exponentielles Wachstum. Welches sind die Grundlagen für exponentielles Wachstum? Inwieweit treffen diese Grundlagen auf den Erdölverbrauch zu?

c) Geben Sie den gesamten Verbrauch für die Jahre 1880 bis 1925 an. Welcher Gesamtverbrauch ergibt sich bis zum Jahr 2000, wenn man den gleichen jährlichen Zuwachs wie in den Jahren von 1880 bis 1925 voraussetzt?

d) Der Verbrauch im Jahr 2000 betrug 3 Milliarden Tonnen Erdöl. Die zu diesem Zeitpunkt verfügbaren und wirtschaftlich abbaubaren Vorräte wurden auf 145 Milliarden Tonnen geschätzt.

Wie lange werden die Vorräte reichen, wenn man von einem jährlichen Mehrverbrauch von 3% ausgeht?

Wie groß müsste der Zuwachs sein, damit die Vorräte mindestens 50 Jahre halten?

Geben Sie einen Ansatz an und schätzen Sie den Zuwachs.

8. Gegeben sind die Funktionen  $f$  und  $g$  mit  $f(x) = \frac{x}{e^x}$  mit  $x \in \mathbb{R}$  und

$$g(x) = \frac{e^x}{x} \text{ mit } x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

a) Begründen Sie das asymptotische Verhalten der beiden Funktionen.

b) Zeigen Sie, dass  $f$  und  $g$  die gleichen Extremstellen haben.

c) Berechnen Sie den Abstand der beiden Extrempunkte.

d) Wir betrachten jetzt die Funktionen  $h(x, u) = u \cdot x + f(x)$  mit  $u \in [0, 2]$ .

Wie entstehen die Grafen von  $h$  aus den Grafen von  $f$ ?

Vergleichen Sie die Eigenschaften der Grafen von  $h$  und  $f$ .

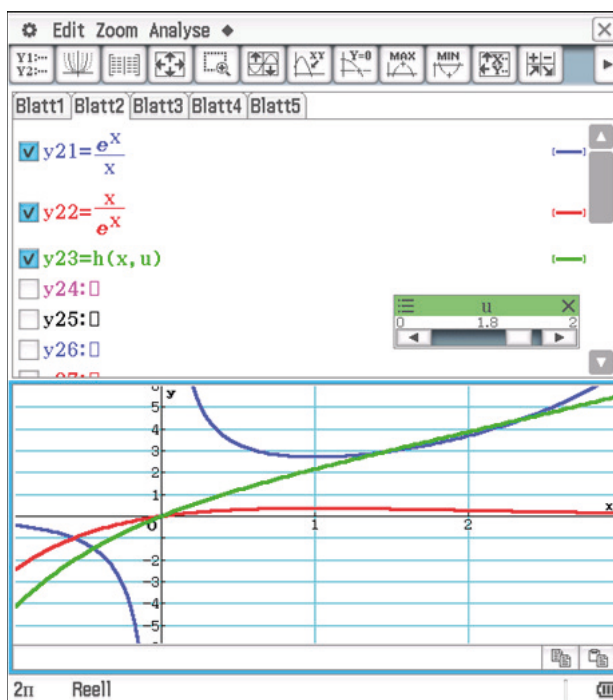
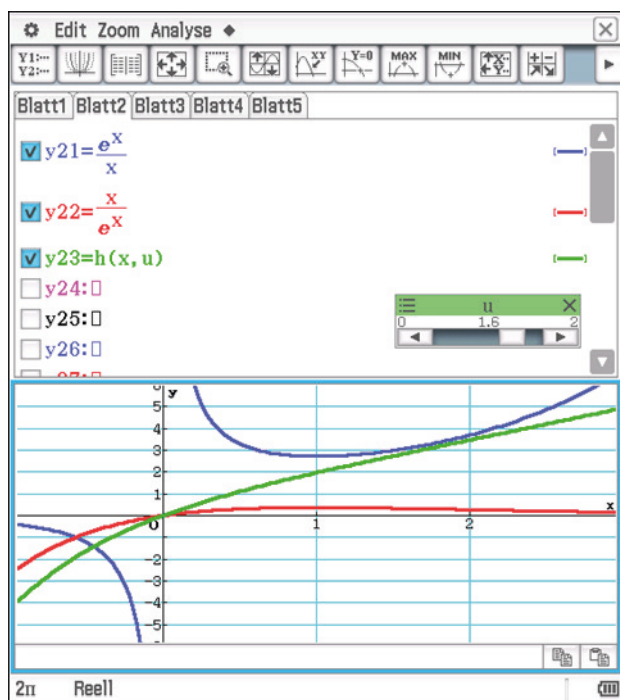
e) Einer der Grafen von  $h$  berührt den Grafen von  $g$ . Für welches  $u$  ist dies der Fall? Begründen Sie dies zunächst an ausgewählten Grafen der Funktionen.

f) Berechnen Sie den Flächeninhalt zwischen der  $x$ -Achse und dem Grafen von  $f$  im Intervall  $[0, 1]$ .

g) Berechnen Sie die Flächeninhalte für die Funktionen  $k(x, v) = \frac{x^v}{e^x}$  für  $x \in [0, \infty)$  und  $v \in \{1, 2, 3, 4\}$

Was fällt Ihnen auf?

# Lösungen für 8e:

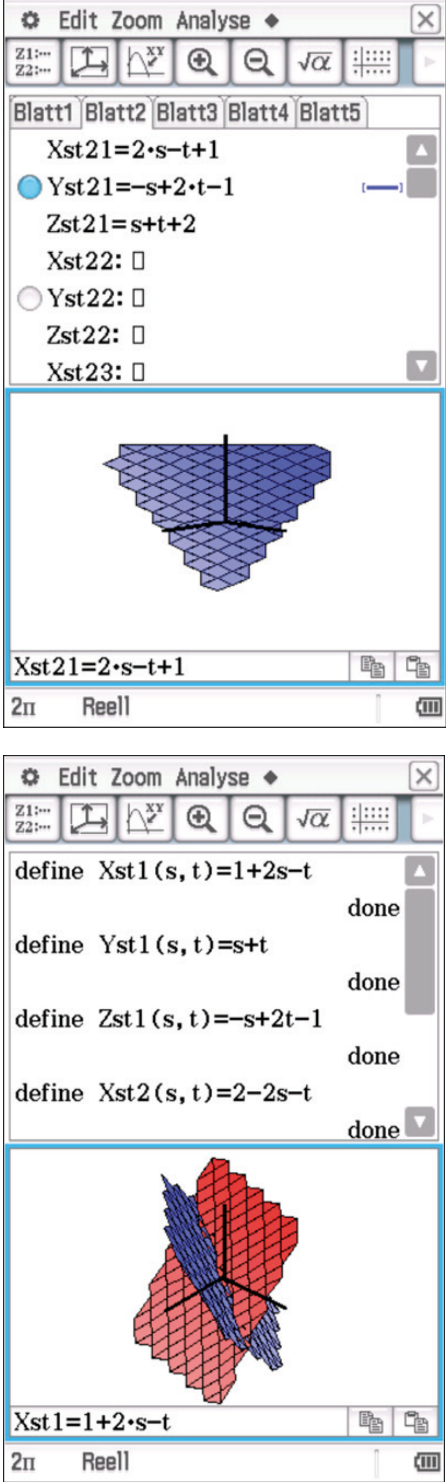





```

Edit Aktion Interaktiv
0.5 1/2  |> |< | f dx / f dx | Simp | f dx | v | v
define g(x)=e^x/x
done
define f(x)=x/e^x
done
d/dx (f(x))
-(x-1)·e^-x
d/dx (g(x))
(x·e^x-e^x)/x^2
define h(x,u)=u*x+f(x)
done
d/dx (h(x,u))
(u·e^-x-x+1)·e^-x
{ (u·e^-x-x+1)·e^-x = x·e^x-e^x / x^2 |
  g(x)=h(x,u) | x, u
{x=1.843051097, u=1.700977964}
    
```

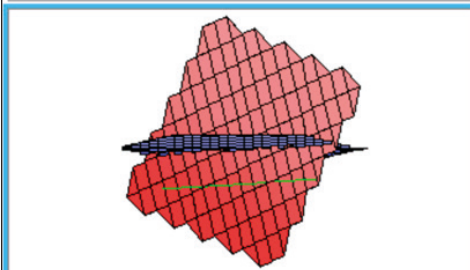
# Lineare Algebra und Analytische Geometrie

## Ebenen und deren Gleichungen

Bezug zum Lehrplan	Screenshot
<p>Inhaltliche Schwerpunkte:</p> <p>Ebenen: Parameterform, Koordinatenform, Normalenvektor</p> <p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <p>(2) stellen Ebenen in Parameterform und in Koordinatenform dar,</p>	 <p>The first screenshot shows a software window titled 'Edit Zoom Analyse' with a toolbar containing icons for coordinate systems, zooming, and mathematical symbols. Below the toolbar, there are tabs for 'Blatt1' through 'Blatt5'. The main area contains the following equations:</p> $\begin{aligned} X_{st21} &= 2 \cdot s - t + 1 \\ Y_{st21} &= -s + 2 \cdot t - 1 \\ Z_{st21} &= s + t + 2 \end{aligned}$ <p>Below these equations, there are input fields for <math>X_{st22}</math>, <math>Y_{st22}</math>, <math>Z_{st22}</math>, <math>X_{st23}</math>, and <math>Y_{st23}</math>. A 3D plot shows a blue grid representing a plane. The bottom status bar displays the equation <math>X_{st21} = 2 \cdot s - t + 1</math> and the text '2π Reell'.</p> <p>The second screenshot shows the same software window. The main area contains the following definitions:</p> <pre>define Xst1(s,t)=1+2s-t done define Yst1(s,t)=s+t done define Zst1(s,t)=-s+2t-1 done define Xst2(s,t)=2-2s-t done</pre> <p>A 3D plot shows two intersecting planes, one red and one blue. The bottom status bar displays the equation <math>X_{st1} = 1 + 2 \cdot s - t</math> and the text '2π Reell'.</p>

Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
<p>Ebenen lassen sich grafisch darstellen im 3d Bereich des ClassPad. Zur Darstellung ist die Ebene zeilenweise einzutragen.  Mit  lässt sich die Darstellung erzeugen.  Für Bereichseinstellungen wähle man .</p> <p>Ob Achsen eines Koordinatensystems dazu gezeichnet werden, lässt sich über  regeln.  Mit Hilfe des Stiftes bzw. der Maus lässt sich die Ebene drehen.  Eine permanente Drehung lässt sich über das Menü Raute neben <i>Analyse</i> einstellen. Beenden lässt sich die Rotation durch Betätigung der Clear -Taste (Handheld) bzw. Esc-Taste (Laptop, Tablet).</p> <p>Will man mehr als eine Ebene darstellen, geht das nur, wenn man diese vorher im <i>main</i> Bereich definiert (s. Abb. links) Im 3d Bereich direkt lässt sich nur eine Ebene zurzeit darstellen.  Von daher ist es auch nicht möglich, zum Beispiel Schnittgeraden in dem Bereich zu berechnen und darzustellen.  Der Menüpunkt <i>Analyse</i> eröffnet nur die Möglichkeit, Punkte auf der Ebene zu verschieben (-&gt; <i>Verfolgen</i>) und die z-Koordinate zu bestimmen.</p>	<p>Gegeben ist die Ebene E mit:</p> $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ <p>Die beiden Ebenengleichungen (s. Abb. links):</p> $E1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $E2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

# Inzidenzprobleme

Bezug zum Lehrplan	Screenshot
<p>Inhaltliche Schwerpunkte:</p> <p>Schnittpunkte: Geraden und Ebenen</p> <p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <p>(4) berechnen Schnittpunkte von Geraden mit Ebenen</p>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <math display="block">\begin{cases} 1+2s-t=2-2u-v \\ s+t=u-v \\ -1-s+2t=1-2u+v \end{cases}   s, t, u</math> <math display="block">\left\{ \frac{(11 \cdot v - 2)}{15}, t = \frac{-(v-7)}{15}, u = \frac{v+3}{5} \right\}</math> </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-top: 5px;"> <p>Edit Zoom Analyse</p> <p>Z1: ... Z2: ...</p> <p>Blatt1 Blatt2 Blatt3 Blatt4 Blatt5</p> <p>Xst2=2-2·s-t</p> <p><input checked="" type="radio"/> Yst2=s-t</p> <p>Zst2=1-2·s+t</p> <p>Xst3=2.8-1.4·t</p> <p><input checked="" type="radio"/> Yst3=0.6-0.8·t</p> <p>Zst3=-0.2+0.6·t</p> <p><input type="radio"/> z4: □</p>  <p>Xst1=1+2·s-t</p> <p>2π Reell</p> </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-top: 5px;"> <p>Edit Aktion Interaktiv</p> <p>0.5 1 2</p> <p><math>\frac{f dx}{f dx^4}</math> Simp <math>\frac{f dx}{f dx}</math></p> <p>define Zst3(s, t)=-0.2+0.6t</p> <p>done</p> <math display="block">\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \{s, t, u\}</math> <math display="block">\left\{ \frac{(11 \cdot v - 2)}{15}, t = \frac{-(v-7)}{15}, u = \frac{v+3}{5} \right\}</math> <p>□</p> </div>



Bezug zum Lehrplan	Screenshot
<p>Inhaltliche Schwerpunkte:</p> <p>Schnittpunkte: Geraden und Ebenen</p> <p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <p>(4) berechnen Schnittpunkte von Geraden mit Ebenen</p>	<hr/> $\det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ <p style="text-align: right;">9</p> $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + r \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ <pre>solve([[1], [0], [-1]]+s*[[2], [1], [-1]]+t*[[ -1], [1], [2]]-r*[[1], [-1], [2]])       {r=-2, s=-2, t=-3}</pre> $\text{solve} \left( \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & x \end{pmatrix} = 0, x \right)$ <p style="text-align: right;">{x=-1}</p> $\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ <p style="text-align: right;">0</p> $\text{solve} \left( \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$ <p style="text-align: right;">{s=-1, t=1}</p>

Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
<p>Matrizen lassen sich direkt über die Tastatur eingeben (<i>Math2</i>).</p> <p>Den Befehl für die Determinante findet man: <i>Interaktiv -&gt; Matrix -&gt; Berechnungen -&gt; det</i></p> <p>Die zu lösende Gleichung lässt sich direkt eingeben. Wenn man dann diese markiert und den <i>solve</i> Befehl wählt, ist an Stelle der Lösungsvariablen <i>x</i> die Liste <math>\{r,s,t\}</math> in geschweiften Klammern einzugeben. Der ClassPad linearisiert dann die Gleichung, was sie unübersichtlicher macht (s. Abb. links)</p> <p>Der ClassPad lässt sich nutzen, um Koordinaten zu bestimmen, so dass die Geraden in einer Ebene liegen.</p> <p>Die Gleichungen wurden wieder direkt eingegeben und dieses Mal nicht linearisiert. Das <i>x</i> ist genau wie oben entsprechend durch <math>\{s,t\}</math> zu ersetzen.</p>	<p>Gegeben sei die Ebene <math>E_1</math></p> $E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ <p>Und die Gerade <i>g</i></p> $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ <p>Entweder es gibt einen Schnittpunkt oder die Gerade <i>g</i> liegt parallel zu <math>E_1</math>. Man kann die beiden Gleichungen einfach gleichsetzen oder aber vorher untersuchen, ob die Gerade in der Ebene liegt oder parallel zu dieser ist. Wenn das der Fall ist, müssen die drei Richtungsvektoren in eine Ebene liegen. Dies lässt sich am einfachsten überprüfen, indem die Determinante aus den drei Vektoren gebildet wird. Da der Wert nicht 0 ist, muss es einen Schnittpunkt geben. Der Schnittpunkt <i>S</i> hat die Koordinaten <math>S(0/-5/-5)</math>. Zwei Geraden schneiden sich, wenn sie in einer Ebene liegen und nicht parallel sind.</p> <p><math>G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}</math></p> $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ $g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ <p>Die beiden Geraden liegen genau dann in einer Ebene, wenn die beiden Richtungsvektoren und der Differenzvektor der beiden Ortsvektoren in einer Ebene liegen. Ob dies der Fall ist, lässt sich mit der Determinante überprüfen.</p> <p>Als Schnittpunkt ergibt sich <math>S(3/0/-3)</math></p>

# Das Skalarprodukt

Bezug zum Lehrplan	Screenshot
<p>Inhaltliche Schwerpunkte:</p> <p>Lagebeziehungen und Abstände: Punkte, Geraden, Ebenen (alle Kombinationen nur LK)</p> <p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <p>(9) untersuchen geometrische Objekte oder Situationen in innermathematischen und anwendungsbezogenen Problemstellungen und deuten die Ergebnisse. (nur GK – Abstandsberechnungen werden nicht direkt angesprochen)</p> <p>im LK direkt:</p> <p>(10) bestimmen Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen</p>	$\text{dotP}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right)$ $2 \cdot x + y - z$ $\text{dotP}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right)$ $-x + y + 2 \cdot z$ $\begin{cases} 2 + y - z = 0 \\ -1 + y + 2z = 0 \end{cases} \Big _{y, z}$ $\{y = -1, z = 1\}$ $\text{crossP}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$ $\begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\text{norm}\left(\begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$ $3 \cdot \sqrt{3}$

Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
<p>Den Befehl dotP für das Skalarprodukt findet man: <i>Interaktiv</i> -&gt; <i>Vektor</i> -&gt; <i>dotP</i>  Dies ist aber eher umständlich, da die beiden Vektoren in horizontaler Form eingegeben werden müssen und können nicht hinein kopiert werden. So wird der Befehl einfacher über die Tastatur als Buchstabenkombination eingegeben.</p> <p>Man hätte die beiden Rechnungen auch in einer ausführen können.</p> <p>Alternativ lässt sich der Normalenvektor auch mit Hilfe des Kreuzproduktes (<i>crossP</i>) bestimmen. Den Befehl findet man wie oben im Bereich <i>Vektor</i>.</p> <p>Für die Eingabe gilt das Gleiche wie für dotP.</p> <p>Der Befehl <i>norm</i> ist ebenfalls im Bereich <i>Vektor</i> zu finden. Da es sich hier nur um einen Vektor handelt, lässt sich dieser vorher markieren und wird dann direkt übertragen.</p>	<p>Für Abstände zu Ebenen und zur Bestimmung der Lage zweier Ebenen zueinander benötigt man die Normalenform der Ebenengleichung. Wir bestimmen diese zu der folgenden Ebene:</p> $E1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ <p>Gesucht ist der Normalenvektor <math>\vec{n} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}</math></p> <p>Das Skalarprodukt dieses Vektors mit den beiden Richtungsvektoren muss 0 ergeben.</p> $\Leftrightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $E: \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left( \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = 0$ <p>→ Koordinatenform:  → <math>x - y + z = 0</math></p> <p>Für die Hesse Form wird der Normaleneinheitsvektor benötigt.</p> $\vec{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

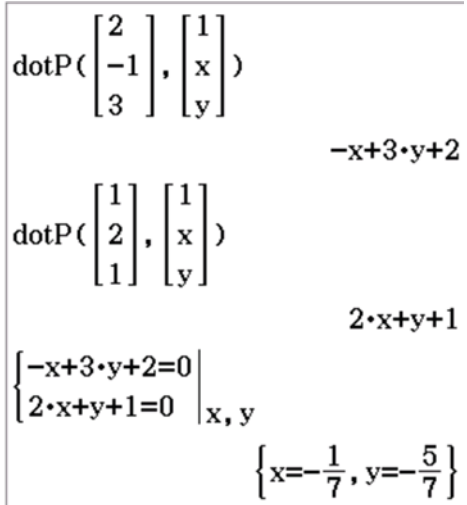
Bezug zum Lehrplan	Screenshot
<p>Inhaltliche Schwerpunkte:</p> <p>Vektoroperation: Skalarprodukt  Ebenen: Parameterform, Koordinatenform, Normalenvektor  Schnittwinkel: Geraden, Geraden und Ebenen, Ebenen</p> <p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <p>(1) deuten das Skalarprodukt geometrisch (Orthogonalität, Betrag, Winkel zwischen Vektoren) und berechnen es,</p> <p>(5) berechnen die Größe des Schnittwinkels zwischen zwei sich schneidenden Objekten,</p>	<p>The screenshot shows a sequence of mathematical operations in a software interface:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Calculation of the dot product of vectors <math>\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}</math> and <math>\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}</math>, resulting in the expression <math>2 \cdot x + y - z</math>.</li> <li>Calculation of the dot product of vectors <math>\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}</math> and <math>\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}</math>, resulting in the expression <math>-x + y + 2 \cdot z</math>.</li> <li>Solving a system of linear equations: <math display="block">\begin{cases} 2 \cdot x + y - z = 0 \\ -x + y + 2 \cdot z = 0 \end{cases} \Big _{x, y}</math> The solution set is shown as <math>\{x=z, y=-z\}</math>.</li> <li>Calculation of the angle between vectors <math>\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}</math> and <math>\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}</math>. The formula used is: <math display="block">180 \cdot \frac{-\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{78}}{39}\right) \cdot \pi + \pi}{\pi}</math> The result is approximated as <math>103.0884761</math>.</li> <li>Verification of the angle calculation using the cosine inverse of the normalized dot product: <math display="block">\cos^{-1}\left(\frac{\text{dotP}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}\right)}{\text{norm}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) * \text{norm}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}\right)}\right)</math> The result is also <math>103.0884761</math>.</li> </ul>

Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
<p>Der Befehl für das Skalarprodukt <i>dotP</i> steht unter: <i>Interaktiv</i> -&gt; <i>Vektor</i> -&gt; <i>dotP</i> Aber: siehe oben</p> <p>Der ClassPad bietet mit dem Befehl <i>angle</i>, Winkel zwischen Vektoren direkt zu bestimmen. Dieser Befehl ist aber im Rahmen der Bedingungen des IQB bzgl. MMS nicht zugelassen.</p> <p>Der Winkel lässt sich auch direkt mit dem Skalarprodukt berechnen.</p> <p>Um den Winkel in Gradmaß zu erhalten, muss dies im Grundformat entsprechend eingestellt sein.</p>	<p>Im Folgenden ist der Schnittwinkel zwischen den beiden Ebenen E1 und E2 zu bestimmen. Dazu wird der Normalenvektor mit Hilfe des Skalarprodukts bestimmt. Wenn <math>\vec{u}</math> ein Richtungsvektor ist und <math>\vec{n}</math> ein Normalenvektor, dann muss gelten: <math>\vec{u} \cdot \vec{n} = 0</math> Als Normalenvektoren ergeben sich:</p> $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ <p>Als Schnittwinkel ergibt sich <math>\alpha_s \approx 103^\circ</math></p>

# Lagebeziehungen und Abstände

Bezug zum Lehrplan	Screenshot
<p>Inhaltliche Schwerpunkte</p> <p>Lineare Gleichungssysteme</p> <p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <p>(8) interpretieren die Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen (nur LK)</p> <p>Inhaltliche Schwerpunkte:</p> <p>Lagebeziehungen und Abstände: Punkte, Geraden, Ebenen (alle Kombinationen nur LK)</p> <p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <p>(9) untersuchen geometrische Objekte oder Situationen in innermathematischen und anwendungsbezogenen Problemstellungen und deuten die Ergebnisse. (nur GK – Abstandsberechnungen werden nicht direkt angesprochen)</p> <p>im LK direkt:</p> <p>(10) bestimmen Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen</p>	$\begin{cases} 3.12x + 7.28y - 4.67z = 11 \\ 3.10x + 7.32y - 4.53z = 2.8 \\ 3.11x + 7.29y - 4.58z = 7 \end{cases} \Big _{x, y, z}$ $\{x=108.0954535, y=-61.255\}$ $\begin{cases} 3.12x + 7.25y - 4.67z = 11 \\ 3.10x + 7.32y - 4.53z = 2.8 \\ 3.11x + 7.29y - 4.58z = 7 \end{cases} \Big _{x, y, z}$ $\{x=-97.57160872, z=29.392\}$ $\begin{bmatrix} -2+2t \\ 1-t \\ 3t-5 \end{bmatrix} \Rightarrow PX$ $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow v$ $\begin{bmatrix} 2 \cdot t - 2 \\ -t + 1 \\ 3 \cdot t - 5 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\text{dotP}(PX, v)$ $2 \cdot (2 \cdot t - 2) + 3 \cdot (3 \cdot t - 5) + t - 1$ $\text{solve}(2 \cdot (2 \cdot t - 2) + 3 \cdot (3 \cdot t - 5) + t - 1)$ $\left\{ t = \frac{10}{7} \right\}$ $10/7 \Rightarrow t$ $\frac{10}{7}$ $PX$ $\begin{bmatrix} \frac{6}{7} \\ -\frac{3}{7} \\ -\frac{5}{7} \end{bmatrix}$ $\text{norm}(ans)$ $\frac{\sqrt{70}}{7}$

Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
<p>Die gemachten Zuordnungen sind nicht erforderlich, machen aber die Berechnungen überschaubarer.</p> <p>Auch diese beiden Operationen lassen sich in einem Schritt ausführen:  <math>Solve(dotP(PX,v)=0,t)</math></p> <p>Nach der Berechnung muss der berechnete Wert noch der Variablen zugeordnet werden. Zu bedenken ist, dass der Wert im Variablenmanager gespeichert wird und auch für zukünftige Berechnungen diesen Wert behält.</p> <p>Der Befehl <i>ans</i> greift direkt auf den zuletzt berechneten Wert zu.</p>	<p>Gegeben ist das Gleichungssystem:  <math>3,12x+7,25y-4,67z=11</math>  <math>3,10x+7,32y-4,53z=2,8</math>  <math>3,11x+7,29y-4,58z=7</math>          Als Lösung erhält man:  <math>x \approx 274,25 \quad y \approx -97,57 \quad z \approx 29,39</math></p> <p>Eine kleine Änderung in der ersten Zeile:  <math>7,25y \rightarrow 7,28y</math>          führt zu folgenden Lösungen:  <math>x \approx 108,10 \quad y \approx -61,26 \quad z \approx -25,63</math></p> <p>Daraus ergibt sich die Frage, warum eine so minimale Änderung solche Auswirkungen hat. Der Grund hierfür ist der sehr kleine Schnittwinkel zwischen den einzelnen Ebenen. Man hat hier also eine geometrische Interpretation für ein algebraisches Problem.</p> <p><b>Abstand: Punkt Gerade:</b>          Gegeben ist die Gerade g durch:</p> $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ <p>Und ein Punkt P (4/-2/5)          Es ist der Abstand zwischen dem Punkt P und der Geraden g zu bestimmen.  <math>X(2+2t/-1-t/3t)</math> sei ein beliebiger Punkt der Geraden.</p> $E1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ <p>Für die Abstandsberechnung benötigt man den Punkt der Geraden, so dass der Vektor <math>(\vec{PX})</math> senkrecht auf dem Richtungsvektor steht.</p> <p>Das heißt: <math>\begin{pmatrix} -2+2t \\ 1-t \\ 3t-5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0</math></p> <p>Als Abstand erhält man ca. 1,195.</p>

Bezug zum Lehrplan	Screenshot
<p>Inhaltliche Schwerpunkte:</p> <p>Lagebeziehungen und Abstände: Punkte, Geraden, Ebenen (alle Kombinationen nur LK)</p> <p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <p>(9) untersuchen geometrische Objekte oder Situationen in innermathematischen und anwendungsbezogenen Problemstellungen und deuten die Ergebnisse. (nur GK – Abstandsberechnungen werden nicht direkt angesprochen)</p> <p>im LK direkt:</p> <p>(10) bestimmen Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen</p>	 <p>The screenshot shows the following calculations:</p> $\text{dotP}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix}\right) \quad -x+3\cdot y+2$ $\text{dotP}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix}\right) \quad 2\cdot x+y+1$ $\begin{cases} -x+3\cdot y+2=0 \\ 2\cdot x+y+1=0 \end{cases} \Big _{x,y} \quad \left\{ x=-\frac{1}{7}, y=-\frac{5}{7} \right\}$ $\text{dotP}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}\right), \quad \frac{1}{\text{norm}\left(\begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix}\right)} * \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$ $\frac{-8\cdot\sqrt{3}}{3}$ $\frac{1}{3} \text{dotP}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}\right), \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $-\frac{1}{3}$

Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
<p>Das Bild links wurde aus 2 Teilbildern der besseren Übersicht halber zusammengesetzt.</p>	<p><b>Abstand zweier windschiefer Geraden:</b> Gegeben sind die Geraden:</p> $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ <p>Zunächst sucht man einen Vektor, der senkrecht auf den beiden Richtungsvektoren steht.</p> $\vec{n} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$ <p>Um den Abstand zu erhalten, ist der Normaleneinheitsvektor mit dem Vektor <math>\overrightarrow{P_1P_2}</math> (<math>P_1 \in g_1</math> u. <math>P_2 \in g_2</math>) zu multiplizieren. Der Abstand beträgt etwa 4,62 Einheiten.</p> <p>Die Abstände in Bezug auf die Ebene lassen sich auf das Problem Abstand Punkt Ebene reduzieren. Vorausgesetzt natürlich, dass die Ebenen sich nicht schneiden, bzw. die Gerade parallel zur Ebene liegt. Gegeben ist die Ebene E E: <math>2x_1 + x_2 + 2x_3 = 6</math> und der Punkt P (2/-1/2).</p> $\vec{n}_0 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad Q (0/0/3) \text{ ist ein Punkt von E}$ <p>Der Abstand beträgt 1/3</p>

## Arbeitsblatt

1. Gegeben ist ein Dreieck durch die Eckpunkte A  $(-2/3/1)$ , B  $(-1/5/2)$  und C  $(4/4/1)$ . Bestimmen Sie die Innenwinkel und den Flächeninhalt des Dreiecks.

2. Gegeben sind die Punkte A  $(2/-1/3)$ , B  $(5/3/3)$ , C  $(5/3/8)$ , D  $(2/-1/5)$  und S  $(23,5/-14/5,5)$

- Zeigen Sie, dass die 4 Punkte A, B, C und D ein Rechteck aufspannen.
- Zusammen mit dem Punkt S ergibt sich eine rechteckige Pyramide. Berechnen Sie das Volumen dieser Pyramide.
- Die Pyramide ist symmetrisch; das heißt die Spitze S liegt genau über dem Mittelpunkt des Rechtecks ABCD. Begründen Sie dies.

3. Bestimmen Sie den Abstand des Punktes Q  $(-2/1/9)$  von der Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Der Punkt Q soll an der Geraden g gespiegelt werden. Begründen Sie, dass Sie dazu den Fußpunkt des Lotes vom Punkt Q auf die Gerade g benötigen. Zeigen Sie, dass P  $(2/1/3)$  der gesuchte Fußpunkt ist und bestimmen Sie den Bildpunkt von Q bei der Spiegelung an g.

4. Die Normalenform der Ebenengleichung lässt sich auf zwei verschiedene Arten angeben.

$$a) (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0 \quad b) \vec{x} \cdot \vec{n} = \vec{p} \cdot \vec{n}$$

Geben Sie für beide Formen eine geometrisch anschauliche Bedeutung an.

5. Gegeben sind die Punkte A  $(-2/1/3)$  und B  $(4/1/5)$ .

- Geben Sie den Mittelpunkt M der Strecke AB an.
- Bestimmen Sie den Spiegepunkt A' von A am Punkt B.

6. Gegeben sind die Punkte A  $(1/-2/3)$ , B  $(5/2/-2)$  und C  $(3/3/1)$

- Geben Sie die Gleichung der Geraden g durch die Punkte A und B an.
- Geben Sie die Gleichung der Ebene E an, in der die drei Punkte A, B und C liegen.
- Geben Sie die Koordinaten eines Punktes D an, der verschieden von den Punkten A, B und C ist und ebenfalls in der Ebene E liegt.
- Geben Sie die Koordinaten eines Punktes F an, der nicht in der Ebene E liegt.
- Geben Sie die Gleichung einer Geraden h an, die parallel zur Geraden g liegt und einen Abstand von 3 Einheiten von der Ebene hat.

7. Gegeben sind die Punkte A  $(-3/2/-1)$ , B  $(-2/7/0)$  und D  $(-3/3/-2)$ .

- Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes C, so dass das Viereck ABCD ein Parallelogramm ist.
- Bestimmen Sie den Mittelpunkt des Parallelogramms.
- Wie lassen sich alle Punkte, die in dem Parallelogramm liegen, beschreiben?

8. Gegeben ist eine Ebene und eine Gerade durch:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix} \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

9.

- Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Ebene mit der x-Achse.
- Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden mit der xy-Ebene.
- Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Ebene und der Geraden.

- Bestimmen Sie den Abstand der Geraden  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  von der Ebene E.

10. Gegeben sind die Geraden:

$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1,5 \\ 3 \end{pmatrix} \quad g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0,5 \\ 9 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

- Zeigen Sie, dass die Geraden  $g_1$  und  $g_2$  windschief sind.
- Bestimmen Sie eine Parameter- und Normalengleichung für die Ebene E, die  $g_2$  enthält und parallel zu  $g_1$  verläuft.  
Geben Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Ebene E mit den Koordinatenachsen an.
- Welchen Abstand hat die Gerade  $g_1$  von der Ebene E? Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden  $g_1'$ , die bezüglich der Ebene E spiegelbildlich zu  $g_1$  liegt.

11. Lösen Sie die beiden folgenden Gleichungssysteme:

$$\begin{aligned} 3,12x + 7,25y - 4,67z &= 11 \\ 3,10x + 7,32y - 4,53z &= 2,8 \\ 3,11x + 7,29y - 4,58z &= 7 \end{aligned}$$

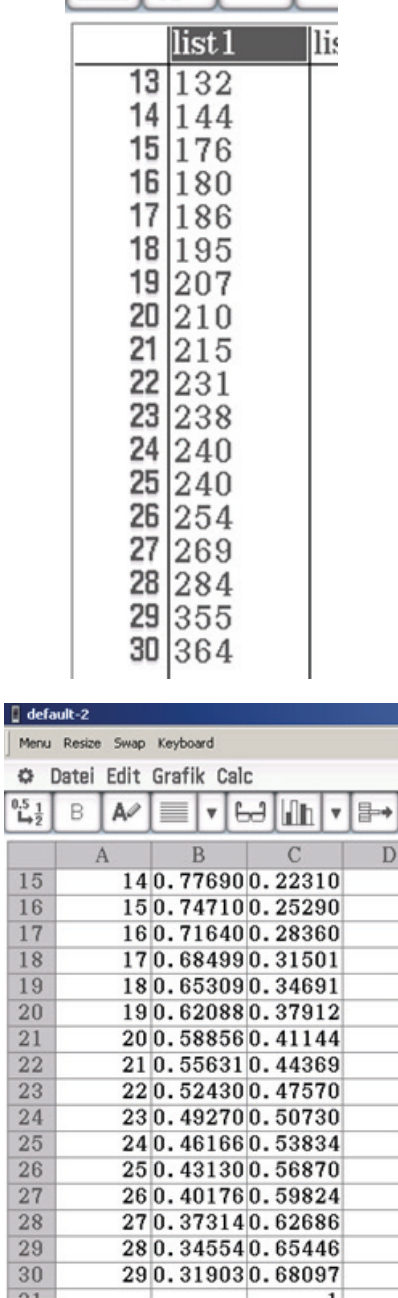
Und:

$$\begin{aligned} 3,12x + 7,28y - 4,67z &= 11 \\ 3,10x + 7,32y - 4,53z &= 2,8 \\ 3,11x + 7,29y - 4,58z &= 7 \end{aligned}$$

Beschreiben Sie, was Ihnen auffällt und begründen Sie die Unterschiedlichkeit der beiden Ergebnisse.

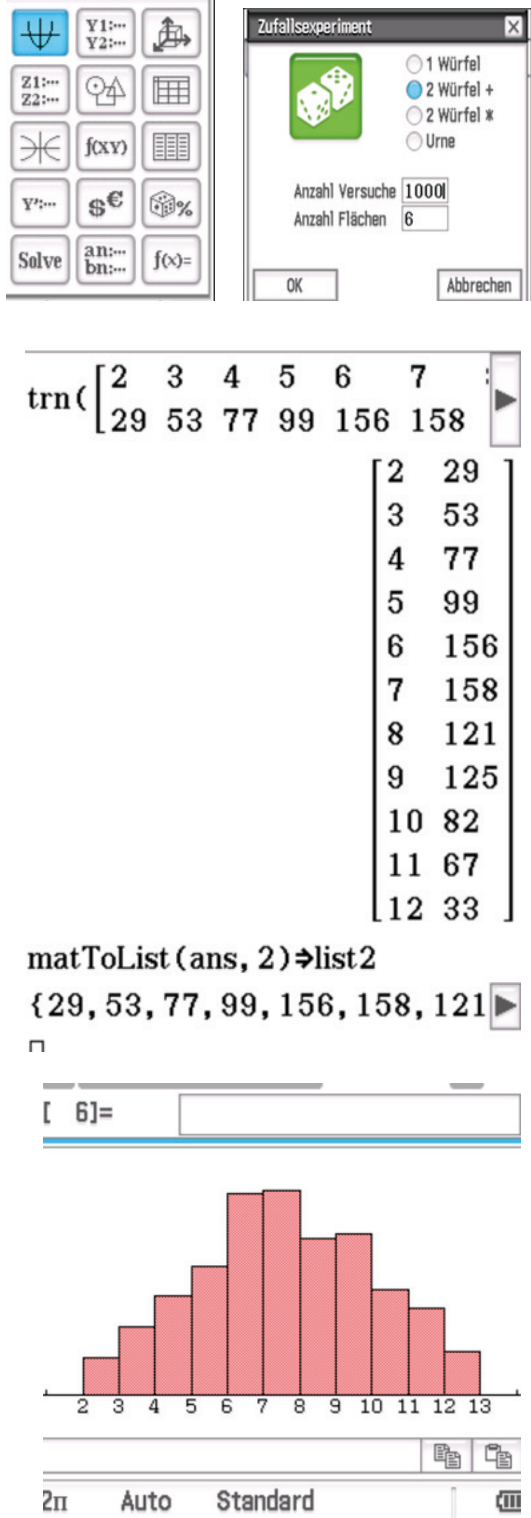
# Stochastik


## Das Geburtstagsproblem

Bezug zum Lehrplan	Screenshot																																																																																					
<p>Inhaltliche Schwerpunkte:                      Mehrstufige Zufallsexperimente</p>	 <p>The screenshot shows two parts of a spreadsheet application. The top part is a list titled 'list 1' with values from 13 to 30. The bottom part is a table with columns A, B, and C, and rows 15 to 30. The table contains numerical data for each row.</p> <table border="1" data-bbox="858 1310 1257 1765"> <thead> <tr> <th></th> <th>A</th> <th>B</th> <th>C</th> <th>D</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>15</td><td>14</td><td>0.77690</td><td>0.22310</td><td></td></tr> <tr><td>16</td><td>15</td><td>0.74710</td><td>0.25290</td><td></td></tr> <tr><td>17</td><td>16</td><td>0.71640</td><td>0.28360</td><td></td></tr> <tr><td>18</td><td>17</td><td>0.68499</td><td>0.31501</td><td></td></tr> <tr><td>19</td><td>18</td><td>0.65309</td><td>0.34691</td><td></td></tr> <tr><td>20</td><td>19</td><td>0.62088</td><td>0.37912</td><td></td></tr> <tr><td>21</td><td>20</td><td>0.58856</td><td>0.41144</td><td></td></tr> <tr><td>22</td><td>21</td><td>0.55631</td><td>0.44369</td><td></td></tr> <tr><td>23</td><td>22</td><td>0.52430</td><td>0.47570</td><td></td></tr> <tr><td>24</td><td>23</td><td>0.49270</td><td>0.50730</td><td></td></tr> <tr><td>25</td><td>24</td><td>0.46166</td><td>0.53834</td><td></td></tr> <tr><td>26</td><td>25</td><td>0.43130</td><td>0.56870</td><td></td></tr> <tr><td>27</td><td>26</td><td>0.40176</td><td>0.59824</td><td></td></tr> <tr><td>28</td><td>27</td><td>0.37314</td><td>0.62686</td><td></td></tr> <tr><td>29</td><td>28</td><td>0.34554</td><td>0.65446</td><td></td></tr> <tr><td>30</td><td>29</td><td>0.31903</td><td>0.68097</td><td></td></tr> </tbody> </table>		A	B	C	D	15	14	0.77690	0.22310		16	15	0.74710	0.25290		17	16	0.71640	0.28360		18	17	0.68499	0.31501		19	18	0.65309	0.34691		20	19	0.62088	0.37912		21	20	0.58856	0.41144		22	21	0.55631	0.44369		23	22	0.52430	0.47570		24	23	0.49270	0.50730		25	24	0.46166	0.53834		26	25	0.43130	0.56870		27	26	0.40176	0.59824		28	27	0.37314	0.62686		29	28	0.34554	0.65446		30	29	0.31903	0.68097	
	A	B	C	D																																																																																		
15	14	0.77690	0.22310																																																																																			
16	15	0.74710	0.25290																																																																																			
17	16	0.71640	0.28360																																																																																			
18	17	0.68499	0.31501																																																																																			
19	18	0.65309	0.34691																																																																																			
20	19	0.62088	0.37912																																																																																			
21	20	0.58856	0.41144																																																																																			
22	21	0.55631	0.44369																																																																																			
23	22	0.52430	0.47570																																																																																			
24	23	0.49270	0.50730																																																																																			
25	24	0.46166	0.53834																																																																																			
26	25	0.43130	0.56870																																																																																			
27	26	0.40176	0.59824																																																																																			
28	27	0.37314	0.62686																																																																																			
29	28	0.34554	0.65446																																																																																			
30	29	0.31903	0.68097																																																																																			

Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
<p>Der passende Befehl ist: = <i>rand(1,365)</i>. Da sich in der Tabellenkalkulation die Werte nicht so einfach ordnen lassen übertragen wir diese in das Statistik Menü.          Spalte markieren -&gt; <i>Datei</i> -&gt; <i>Export</i> -&gt; Als Variable <i>list1</i> und als <i>Typ</i> Liste wählen          Im Statistik Menü:  <i>Edit</i> -&gt; <i>Sortieren</i> -&gt; <i>ansteigend</i></p> <p>In Spalte A stehen die Anzahlen, auf die Bezug genommen wird.  <i>B2: =B1*(365-(A2-1))/365</i>          Die weiteren Zellen erhält man über:  <i>Markieren</i> -&gt; <i>Kopieren</i> -&gt; <i>entsprechende Zellen markieren</i> -&gt; <i>Einfügen</i>          Das heißt in Spalte B stehen die Gegenwahrscheinlichkeiten.  <i>C1: =1-B1</i>          Die weiteren Zellen erhält man entsprechend wie in Spalte B.</p>	<p>Das Geburtstagsproblem:          Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Gruppe von n Personen zwei am gleichen Tag Geburtstag haben.          Zunächst ist es hilfreich, ein wenig zu experimentieren. Dies kann durch Umfragen in einzelnen Klassen bzw. Kursen, Recherchieren in Lexika oder natürlich auch digital geschehen.</p> <p>In der Tabellenkalkulation lassen sich zum Beispiel 30 Zufallszahlen erzeugen aus der Menge {1, 2, 3, ..., 365} Dabei setzen wir voraus, dass die Geburtstage bezogen auf das Jahr gleichverteilt sind.          Damit man die Werte hinsichtlich ihres Auftretens besser erfassen kann, ist es hilfreich, diese der Größe nach zu sortieren.          Wir interessieren uns nun für die Abhängigkeit der Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens 2 Personen am gleichen Tag Geburtstag haben, von der Anzahl n.          Dazu berechnen wir jeweils die Gegenwahrscheinlichkeit q und bestimmen p          Mit: <math>p=1-q</math>          Für q gilt:</p> $q = \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \dots \cdot \frac{365 - (n - 1)}{365}$ <p>Die Werte in Abhängigkeit von n lassen sich am einfachsten mit einer Tabellenkalkulation bestimmen.          Aus den Werten ist abzulesen, dass die gesuchte Wahrscheinlichkeit für n = 23 das erste Mal größer als 0,5 ist.</p>


# Simulation mit Würfeln und Münzen

Bezug zum Lehrplan	Screenshot																																																																																																																					
<p>Inhaltliche Schwerpunkte:                      Mehrstufige Zufallsexperimente,                      Urnenmodelle</p> <p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <p>(1) planen und beurteilen statistische Erhebungen und nutzen dabei auch digitale Mathematikwerkzeuge,</p> <p>(2) untersuchen und beurteilen Stichproben mithilfe von Lage- und Streumaßen, und verwenden das Summenzeichen,</p> <p>(3) verwenden Simulationen zur Untersuchung stochastischer Situationen und nutzen dabei auch digitale Mathematikwerkzeuge,</p> <p>(4) verwenden Urnenmodelle (Ziehen mit und ohne Zurücklegen) zur Beschreibung von Zufallsprozessen und zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten</p>	 <p>The screenshot shows the TI-84 Plus calculator interface. At the top, there is a toolbar with various function keys. A window titled 'Zufallsexperiment' is open, showing options for '1 Würfel', '2 Würfel +', '2 Würfel *', and 'Urne'. The '2 Würfel +' option is selected. Below the window, the calculator screen displays a table of results for 12 trials, a list of the second column values, and a histogram of the distribution.</p> <table border="1" data-bbox="837 862 1332 1433"> <tr> <td>trn</td> <td>[</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>6</td> <td>7</td> <td>:</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td>29</td> <td>53</td> <td>77</td> <td>99</td> <td>156</td> <td>158</td> <td>▶</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td>2</td> <td>29</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td>3</td> <td>53</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td>4</td> <td>77</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td>5</td> <td>99</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td>6</td> <td>156</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td>7</td> <td>158</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td>8</td> <td>121</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td>9</td> <td>125</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td>10</td> <td>82</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td>11</td> <td>67</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td>12</td> <td>33</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table> <p>matToList(ans, 2) → list2          {29, 53, 77, 99, 156, 158, 121} ▶</p> <p>[ 6]=</p> <p>2π Auto Standard</p>	trn	[	2	3	4	5	6	7	:			29	53	77	99	156	158	▶			2	29								3	53								4	77								5	99								6	156								7	158								8	121								9	125								10	82								11	67								12	33					
trn	[	2	3	4	5	6	7	:																																																																																																														
		29	53	77	99	156	158	▶																																																																																																														
		2	29																																																																																																																			
		3	53																																																																																																																			
		4	77																																																																																																																			
		5	99																																																																																																																			
		6	156																																																																																																																			
		7	158																																																																																																																			
		8	121																																																																																																																			
		9	125																																																																																																																			
		10	82																																																																																																																			
		11	67																																																																																																																			
		12	33																																																																																																																			

Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
<p>Im Bereich main gibt es ein Werkzeug zur Simulation des Würfels und für Urnenmodelle (s. Abb. links) </p> <p>Es ergibt sich ein Ausdruck wie zum Beispiel in der Abbildung links. Durch den Befehl <code>trn</code> wird daraus eine Matrix. Zur Visualisierung sind die Werte in den Statistik Bereich zu übertragen. Damit dies möglich ist, müssen die Spalten der Matrix in Listen verwandelt werden. Da dies nur spaltenweise geschehen kann, lässt man den Befehl (s. Abb. links) zunächst für Spalte 1 und <code>list1</code> ausführen und ändert dann einfach jeweils 1 in 2 um. Alternativ hätte man die Spalten einzeln rauskopieren können und dann den Befehl auf die einspaltigen Matrizen ausführen lassen.</p> <p>Im Statistik Menü sollten dann die beiden ersten Spalten mit den Werten gefüllt sein. Um das Histogramm <code>lins</code> zu erhalten, muss zunächst im Bereich  die folgende Einstellung gewählt werden.</p> <div data-bbox="264 1256 708 1541" style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>Stat-Grafik einst.</p> <p>1 2 3 4 5 6 7 8 9</p> <p>Zeichn.: <input checked="" type="radio"/> Ein <input type="radio"/> Aus</p> <p>Typ: <b>Histogramm</b> ▼</p> <p>X-List: list1 ▼</p> <p>Häufigk: list2 ▼</p> </div> <p>→ Grafik einstellen -&gt; StatGraph2</p> <p>Das Histogramm wird mittels  ausgegeben. Wenn man das Gleiche mit mehr als zwei Würfeln durchführen möchte, muss man dies in der Tabellenkalkulation machen und den Befehl <code>=rand(1,6)</code> wählen.</p>	<p>Am Anfang eignet sich sicher ein relativ einfacher Zugang zu Zufallsexperimenten, da ja im Einführungsjahr Stochastik nicht Thema des Unterrichts ist.</p> <p>Als Zufallsexperiment diskutieren wir das Werfen zweier Würfel und betrachten als Ereignis die Augensumme.</p> <p>Leider ist die Anzahl der Durchführungen auf 1000 begrenzt. Ansonsten böte sich schon hier die Möglichkeit, das Gesetz der großen Zahlen vorzubereiten.</p> <p>Im Folgenden betrachten wir ein Urnenmodell mit 6 verschiedenen farbigen Kugeln. Diesen werden die Buchstaben A, B, ..., F zugeordnet. Die Anzahlen der Kugeln entnimmt man der Abbildung (s. 89 oben rechts).</p>

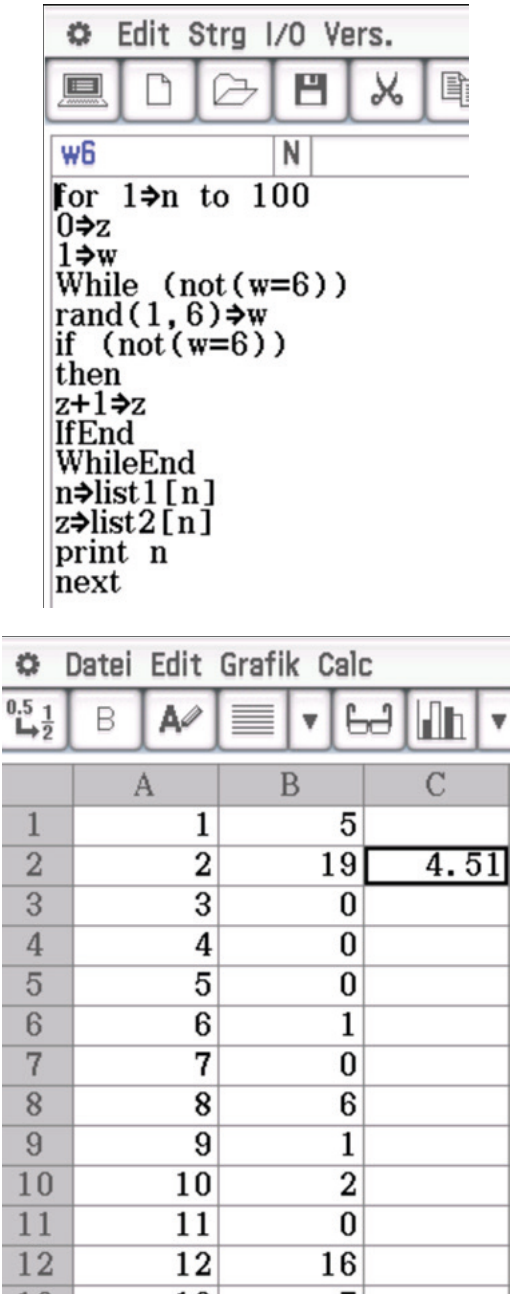
# Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung



Bezug zum Lehrplan	Screenshot																																																								
<p>Inhaltliche Schwerpunkte:</p> <p>Mehrstufige Zufallsexperimente, Urnenmodelle Kenngrößen: Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung</p> <p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <p>(1) planen und beurteilen statistische Erhebungen und nutzen dabei auch digitale Mathematikwerkzeuge,</p> <p>(2) untersuchen und beurteilen Stichproben mithilfe von Lage- und Streumaßen, und verwenden das Summenzeichen,</p> <p>(3) verwenden Simulationen zur Untersuchung stochastischer Situationen und nutzen dabei auch digitale Mathematikwerkzeuge,</p> <p>(4) verwenden Urnenmodelle (Ziehen mit und ohne Zurücklegen) zur Beschreibung von Zufallsprozessen und zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten</p>	<p><b>Ziehen mit Zurücklegen:</b></p> $\begin{bmatrix} A & B & C & D & E & F \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ <p><b>Versuchsanzahl: 1000</b></p> $\begin{bmatrix} A & B & C & D & E & F \\ 48 & 91 & 139 & 200 & 225 & 297 \end{bmatrix}$ <table border="1" data-bbox="836 936 1334 1473"> <thead> <tr> <th></th> <th>A</th> <th>B</th> <th>C</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>0.04762</td><td>48</td><td>288</td></tr> <tr><td>2</td><td>0.09524</td><td>91</td><td>455</td></tr> <tr><td>3</td><td>0.14286</td><td>139</td><td>417</td></tr> <tr><td>4</td><td>0.19048</td><td>200</td><td>600</td></tr> <tr><td>5</td><td>0.23810</td><td>225</td><td>450</td></tr> <tr><td>6</td><td>0.28571</td><td>297</td><td>297</td></tr> <tr><td>7</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>8</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>9</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>10</td><td>0.04762</td><td>47.6</td><td>285.6</td></tr> <tr><td>11</td><td>0.09524</td><td>95</td><td>475</td></tr> <tr><td>12</td><td>0.14286</td><td>143</td><td>572</td></tr> <tr><td>13</td><td>0.19048</td><td>190</td><td>570</td></tr> </tbody> </table> <p><b>2 Würfel +</b></p> <p><b>Versuchsanzahl: 100</b></p> <p><b>Würfelflächen: 2</b></p> $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 25 & 51 & 24 \end{bmatrix}$		A	B	C	1	0.04762	48	288	2	0.09524	91	455	3	0.14286	139	417	4	0.19048	200	600	5	0.23810	225	450	6	0.28571	297	297	7				8				9				10	0.04762	47.6	285.6	11	0.09524	95	475	12	0.14286	143	572	13	0.19048	190	570
	A	B	C																																																						
1	0.04762	48	288																																																						
2	0.09524	91	455																																																						
3	0.14286	139	417																																																						
4	0.19048	200	600																																																						
5	0.23810	225	450																																																						
6	0.28571	297	297																																																						
7																																																									
8																																																									
9																																																									
10	0.04762	47.6	285.6																																																						
11	0.09524	95	475																																																						
12	0.14286	143	572																																																						
13	0.19048	190	570																																																						

Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik																										
<p>Im Menüpunkt  lassen sich auch Urnenmodelle simulieren. Die gemachten Einstellungen lassen sich aus der Abbildung links entnehmen.</p> <p>In Spalte A sind die sich ergebenden Wahrscheinlichkeiten auf Grund der Anzahl der Kugeln näherungsweise angegeben. In der Tabellenkalkulation lassen sich Brüche nicht direkt eingeben, so dass mit ihnen exakt weiter gerechnet werden kann. Einzugeben ist: <math>A1: =1/21</math> usw. Die ersten 6 Werte in Spalte B lassen sich direkt übertragen: markieren -&gt; Kopieren -&gt; Wechsel in die Tabellenkalkulation -&gt; Einfügen Der zweite Teil ergibt sich durch Multiplikation der Werte in Spalte A mit der Anzahl der Versuche (1000)</p> <p>Die Spalte C bezieht sich auf die Tabelle rechts und gibt die Wertigkeiten an.</p> <p>Auch Münzwürfe lassen sich mit dem Würfel Tool simulieren. Man wählt dazu für die Würfelflächen: 2. Als Ergebnismenge ergibt sich dann automatisch: {(1;1); (1,2); (2,1); (2,2)}</p> <p>Für eine neue Simulation muss man aus dem Bereich <i>main</i> heraus- und wieder hineingehen.</p>	<p>Im Unterschied zur obigen Situation hat man jetzt keine Gleichverteilung mehr. Es lassen sich Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Farben (In der Abb. links durch Buchstaben gekennzeichnet) bestimmen und mit den theoretischen Werten vergleichen.</p> <table border="1" data-bbox="810 728 1375 1014"> <thead> <tr> <th>Theoretischer Wert</th> <th>Simulierter Wert</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td><math>1/21 \approx 0,0476</math></td> <td>0,048</td> </tr> <tr> <td><math>2/21 \approx 0,095</math></td> <td>0,091</td> </tr> <tr> <td><math>3/21 \approx 0,143</math></td> <td>0,139</td> </tr> <tr> <td><math>4/21 \approx 0,190</math></td> <td>0,2</td> </tr> <tr> <td><math>5/21 \approx 0,238</math></td> <td>0,225</td> </tr> <tr> <td><math>6/21 \approx 0,286</math></td> <td>0,297</td> </tr> </tbody> </table> <p>Wir geben jetzt den einzelnen Farben noch einen Wert, und zwar:</p> <table border="1" data-bbox="810 1115 1375 1198"> <thead> <tr> <th>A</th> <th>B</th> <th>C</th> <th>D</th> <th>E</th> <th>F</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>6</td> <td>5</td> <td>4</td> <td>3</td> <td>2</td> <td>1</td> </tr> </tbody> </table> <p>Man könnte jetzt daraus ein Glücksspiel machen, indem Spielende die Möglichkeit haben, auf Farben zu setzen. In Spalte C stehen die mit den entsprechenden Faktoren multiplizierten Werte aus Spalte B. Für Schülerinnen und Schüler könnte es auf den ersten Blick erstaunlich sein, dass die Zahlen nicht in etwa gleich groß sind. Bei den theoretisch gewonnenen Werten fällt auf, dass es eine Symmetrie (auf Grund von Rundungen gibt es kleine Unterschiede.) gibt.</p> <p>Für den Münzwurf machen wir folgende Zuordnung: Kopf: 2, Zahl: 1 Es werden 2 Münzen geworfen und die zugeordneten Werte addiert. Die Schülerinnen und Schüler erkennen und können begründen, dass das Ergebnis {Z, K} häufiger vorkommt (s. Abb. links) als die beiden anderen.</p>	Theoretischer Wert	Simulierter Wert	$1/21 \approx 0,0476$	0,048	$2/21 \approx 0,095$	0,091	$3/21 \approx 0,143$	0,139	$4/21 \approx 0,190$	0,2	$5/21 \approx 0,238$	0,225	$6/21 \approx 0,286$	0,297	A	B	C	D	E	F	6	5	4	3	2	1
Theoretischer Wert	Simulierter Wert																										
$1/21 \approx 0,0476$	0,048																										
$2/21 \approx 0,095$	0,091																										
$3/21 \approx 0,143$	0,139																										
$4/21 \approx 0,190$	0,2																										
$5/21 \approx 0,238$	0,225																										
$6/21 \approx 0,286$	0,297																										
A	B	C	D	E	F																						
6	5	4	3	2	1																						

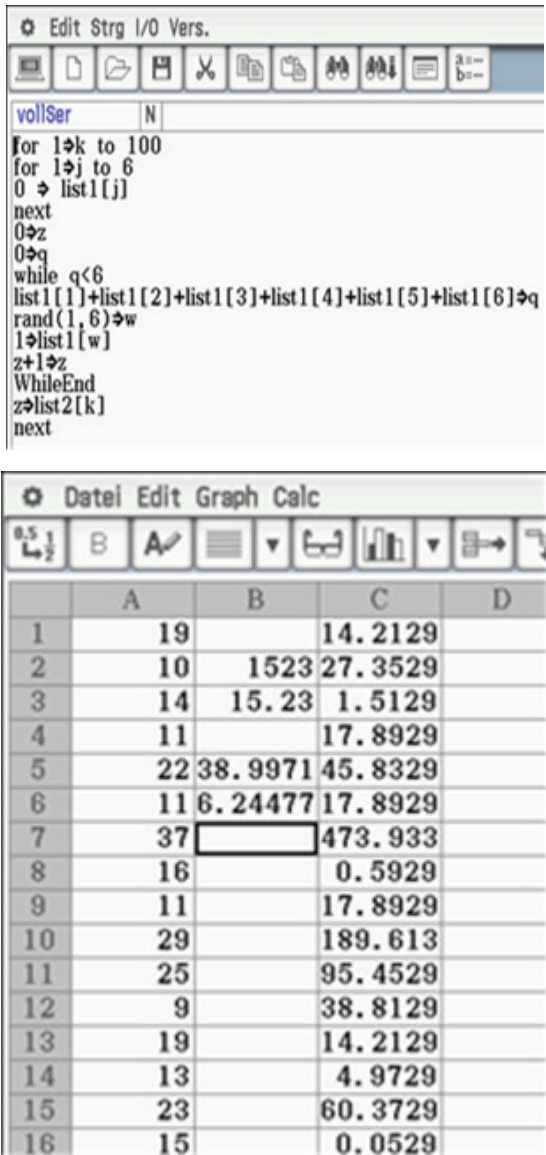
Bezug zum Lehrplan	Screenshot																																																																																																																																																		
<p>Inhaltliche Schwerpunkte:</p> <p>Mehrstufige Zufallsexperimente, Urnenmodelle Kenngrößen: Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung</p> <p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <p>(2) untersuchen und beurteilen Stichproben mithilfe von Lage- und Streumaßen, und verwenden das Summenzeichen</p>	<table border="1" data-bbox="821 315 1358 1059"> <thead> <tr> <th></th> <th>A</th> <th>B</th> <th>C</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>2</td><td>Lev</td><td>90</td><td>46.5</td></tr> <tr><td>3</td><td>Stut</td><td>73</td><td>42</td></tr> <tr><td>4</td><td>Münch</td><td>72</td><td>18.7405</td></tr> <tr><td>5</td><td>Leipz</td><td>65</td><td></td></tr> <tr><td>6</td><td>Dort</td><td>63</td><td></td></tr> <tr><td>7</td><td>Frank</td><td>47</td><td></td></tr> <tr><td>8</td><td>Hoff</td><td>46</td><td></td></tr> <tr><td>9</td><td>Heid</td><td>42</td><td></td></tr> <tr><td>10</td><td>Bremen</td><td>42</td><td></td></tr> <tr><td>11</td><td>Freibg</td><td>42</td><td></td></tr> <tr><td>12</td><td>Augsbg</td><td>39</td><td></td></tr> <tr><td>13</td><td>Wolfsbg</td><td>37</td><td></td></tr> <tr><td>14</td><td>Mainz</td><td>35</td><td></td></tr> <tr><td>15</td><td>M'gladb</td><td>34</td><td></td></tr> <tr><td>16</td><td>Berlin</td><td>33</td><td></td></tr> <tr><td>17</td><td>Bochum</td><td>33</td><td></td></tr> <tr><td>18</td><td>Köln</td><td>27</td><td></td></tr> </tbody> </table> <table border="1" data-bbox="821 1093 1358 1832"> <thead> <tr> <th></th> <th>A</th> <th>B</th> <th>C</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>2</td><td>St. Pau...</td><td>69</td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td>Kiel</td><td>68</td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td>D'dorf</td><td>63</td><td></td></tr> <tr><td>5</td><td>Hambg</td><td>58</td><td></td></tr> <tr><td>6</td><td>Karlsru.</td><td>55</td><td>47.0556</td></tr> <tr><td>7</td><td>Hannov</td><td>52</td><td>45.5</td></tr> <tr><td>8</td><td>Paderb.</td><td>52</td><td>12.3072</td></tr> <tr><td>9</td><td>Fürth</td><td>50</td><td></td></tr> <tr><td>10</td><td>Hertha</td><td>48</td><td></td></tr> <tr><td>11</td><td>schalke</td><td>43</td><td></td></tr> <tr><td>12</td><td>Elversbg</td><td>43</td><td></td></tr> <tr><td>13</td><td>Nürnbg</td><td>40</td><td></td></tr> <tr><td>14</td><td>Kaiserl</td><td>39</td><td></td></tr> <tr><td>15</td><td>Magdebg</td><td>38</td><td></td></tr> <tr><td>16</td><td>Braunsc ...</td><td>38</td><td></td></tr> <tr><td>17</td><td>Wiesb</td><td>32</td><td></td></tr> <tr><td>19</td><td>Osnabr</td><td>28</td><td></td></tr> </tbody> </table>				A	B	C	2	Lev	90	46.5	3	Stut	73	42	4	Münch	72	18.7405	5	Leipz	65		6	Dort	63		7	Frank	47		8	Hoff	46		9	Heid	42		10	Bremen	42		11	Freibg	42		12	Augsbg	39		13	Wolfsbg	37		14	Mainz	35		15	M'gladb	34		16	Berlin	33		17	Bochum	33		18	Köln	27			A	B	C	2	St. Pau...	69		3	Kiel	68		4	D'dorf	63		5	Hambg	58		6	Karlsru.	55	47.0556	7	Hannov	52	45.5	8	Paderb.	52	12.3072	9	Fürth	50		10	Hertha	48		11	schalke	43		12	Elversbg	43		13	Nürnbg	40		14	Kaiserl	39		15	Magdebg	38		16	Braunsc ...	38		17	Wiesb	32		19	Osnabr	28	
	A	B	C																																																																																																																																																
2	Lev	90	46.5																																																																																																																																																
3	Stut	73	42																																																																																																																																																
4	Münch	72	18.7405																																																																																																																																																
5	Leipz	65																																																																																																																																																	
6	Dort	63																																																																																																																																																	
7	Frank	47																																																																																																																																																	
8	Hoff	46																																																																																																																																																	
9	Heid	42																																																																																																																																																	
10	Bremen	42																																																																																																																																																	
11	Freibg	42																																																																																																																																																	
12	Augsbg	39																																																																																																																																																	
13	Wolfsbg	37																																																																																																																																																	
14	Mainz	35																																																																																																																																																	
15	M'gladb	34																																																																																																																																																	
16	Berlin	33																																																																																																																																																	
17	Bochum	33																																																																																																																																																	
18	Köln	27																																																																																																																																																	
	A	B	C																																																																																																																																																
2	St. Pau...	69																																																																																																																																																	
3	Kiel	68																																																																																																																																																	
4	D'dorf	63																																																																																																																																																	
5	Hambg	58																																																																																																																																																	
6	Karlsru.	55	47.0556																																																																																																																																																
7	Hannov	52	45.5																																																																																																																																																
8	Paderb.	52	12.3072																																																																																																																																																
9	Fürth	50																																																																																																																																																	
10	Hertha	48																																																																																																																																																	
11	schalke	43																																																																																																																																																	
12	Elversbg	43																																																																																																																																																	
13	Nürnbg	40																																																																																																																																																	
14	Kaiserl	39																																																																																																																																																	
15	Magdebg	38																																																																																																																																																	
16	Braunsc ...	38																																																																																																																																																	
17	Wiesb	32																																																																																																																																																	
19	Osnabr	28																																																																																																																																																	

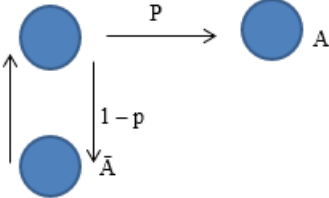
Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik								
<p>Die Vereine und Punkte wurden per Hand übertragen. In Zelle C1 steht der Mittel- bzw. Erwartungswert. In C2 der Median und in C3 die Standardabweichung. Die dafür nötigen Befehle findet man in <i>Calc</i> -&gt; <i>Listenstatistik</i> -&gt; <i>mean</i>, <i>median</i> oder <i>stdDev</i></p> <p>Einen Befehl für die Varianz (<i>variance</i>) findet man ebenfalls dort.</p> <p>Es sei hier darauf hingewiesen, dass im Abitur die oben genannten Berechnungen nicht zulässig sind.</p> <p>Um dieses zu umgehen kann man folgendes tun:</p> <p>Der Mittelwert lässt sich direkt bestimmen durch: <math>=\text{sum}(B2:B19)/18</math>. Für die Bestimmung der Standardabweichung führt man eine weitere Spalte ein.</p> <p>C2: <math>=(B2-46.5)^2</math> Die Spalte C wird mit Kopieren und Einfügen gefüllt. Die Werte in C werden aufsummiert und es wird die Wurzel gezogen.</p> <p>Bzgl. der Berechnungen von Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung gilt gleiches wie oben.</p>	<p>Als Beispiel für die Diskussion von Erwartungswerten und Standardabweichungen wählen wir die Abschlusstabellen der 1. und 2. Bundesliga der Saison 23/24. Die Tabellen findet man im Netz.</p> <p>Aus den Werten erkennt man, dass die Standardabweichung relativ groß ist. Das liegt daran, dass die Werte doch sehr streuen. Deswegen nehmen wir als Ergänzung noch die Werte der 2. Liga hinzu.</p> <p>Diese realen Werte sollen verglichen werden mit dem Ansatz, dass die Ausgänge der Spiele rein zufällig sind. Dabei gehen wir davon aus, dass 25% der Spiele unentschieden enden.</p> <table border="1" data-bbox="810 1099 1374 1178"> <tr> <td>Punkte</td> <td>3</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>Wahrsch.</td> <td>37,5%</td> <td>25%</td> <td>37,5%</td> </tr> </table> <p>Daraus lassen sich der Erwartungswert, Varianz und die Standardabweichung bestimmen:</p> <p>Für ein Spiel:</p> $\mu_1 = 3 \cdot 0,375 + 1 \cdot 0,25 = 1,375$ $V_1 = (1,375-3)^2 \cdot 0,375 + (1,375-1)^2 \cdot 0,25 + 1,375^2 \cdot 0,375 = 1,734375$ <p>Für eine Saison:</p> $\mu = 34 \cdot 1,375 = 46,75$ $V = 34 \cdot V^1 = 58,9687 \rightarrow \sigma = 7,68$ <p>Zumindest der Erwartungswert stimmt gut mit den realen Werten überein. Die Abweichungen bzgl. der Standardabweichung ließen sich erwarten.</p>	Punkte	3	1	0	Wahrsch.	37,5%	25%	37,5%
Punkte	3	1	0						
Wahrsch.	37,5%	25%	37,5%						

Bezug zum Lehrplan	Screenshot																																																				
<p>Inhaltliche Schwerpunkte:</p> <p>Mehrstufige Zufallsexperimente, Urnenmodelle Kenngrößen: Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung</p> <p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <p>(2) untersuchen und beurteilen Stichproben mithilfe von Lage- und Streumaßen, und verwenden das Summenzeichen</p>	 <pre> Edit Strg I/O Vers. w6 N for 1 to 100   0 to z   1 to w   While (not(w=6))     rand(1,6) to w     if (not(w=6))       then         z+1 to z       IfEnd     WhileEnd   n to list1[n]   z to list2[n]   print n next </pre> <table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>A</th> <th>B</th> <th>C</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>1</td><td>5</td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td><td>19</td><td>4.51</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td><td>0</td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td>4</td><td>0</td><td></td></tr> <tr><td>5</td><td>5</td><td>0</td><td></td></tr> <tr><td>6</td><td>6</td><td>1</td><td></td></tr> <tr><td>7</td><td>7</td><td>0</td><td></td></tr> <tr><td>8</td><td>8</td><td>6</td><td></td></tr> <tr><td>9</td><td>9</td><td>1</td><td></td></tr> <tr><td>10</td><td>10</td><td>2</td><td></td></tr> <tr><td>11</td><td>11</td><td>0</td><td></td></tr> <tr><td>12</td><td>12</td><td>16</td><td></td></tr> </tbody> </table> $1/6 * \sum_{n=1}^{\infty} (n * (5/6)^{(n-1)})$		A	B	C	1	1	5		2	2	19	4.51	3	3	0		4	4	0		5	5	0		6	6	1		7	7	0		8	8	6		9	9	1		10	10	2		11	11	0		12	12	16	
	A	B	C																																																		
1	1	5																																																			
2	2	19	4.51																																																		
3	3	0																																																			
4	4	0																																																			
5	5	0																																																			
6	6	1																																																			
7	7	0																																																			
8	8	6																																																			
9	9	1																																																			
10	10	2																																																			
11	11	0																																																			
12	12	16																																																			

Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik										
<p>Um ein Programm zu erstellen, geht man natürlich in das Menü und wählt Programm <i>Edit</i> -&gt; <i>Neue Datei</i> -&gt; Der Name darf aus bis zu 8 Zeichen bestehen. Danach gelangt man automatisch in den Editor zur Programmeingabe.</p> <p>Um die Werte anschließend weiter zu verarbeiten, werden sie in Listen gespeichert. Die vorletzte Zeile "<i>print n</i>" ist natürlich nicht erforderlich.</p> <p>Mit  verlässt man den Editor.</p> <p> startet das Programm. Die Daten können im Statistik Modul direkt eingesehen werden.</p> <p>Am einfachsten lassen sich Erwartungswerte in der Tabellenkalkulation bestimmen.</p> <p><i>Datei</i> -&gt; <i>Import</i>  Variable: <i>list1</i>  Zelle: <i>A1</i>  <i>Datei</i> -&gt; <i>Import</i>  Variable: <i>list2</i>  Zelle: <i>B1</i>  <i>C2</i>: =<i>mean(B1:B100)</i></p>	<p>Frage: Wie lange muss man im Durchschnitt warten, bis man eine „6“ würfelt?</p> <p>Um diese Frage zu beantworten, lässt sich natürlich der Erwartungswert berechnen. Im Vergleich dazu ist es interessant, eine Simulation durchzuführen. Das Programm für eine solche Simulation ist in der Abbildung links dargestellt.</p> <p>Der simulierte Wert von 4,51 erscheint als zu niedrig.</p> <p>Der Erwartungswert lässt sich natürlich auch theoretisch ermitteln.</p> <table border="1" data-bbox="810 1059 1385 1211"> <thead> <tr> <th>Anzahl</th> <th>1</th> <th>2</th> <th>3</th> <th>4</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Wahrscheinlichkeit</td> <td><math>\frac{1}{6}</math></td> <td><math>\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}</math></td> <td><math>\frac{5 \cdot 5}{6 \cdot 6} \cdot \frac{1}{6}</math></td> <td><math>\frac{5^3}{6^3} \cdot \frac{1}{6}</math></td> </tr> </tbody> </table> <p>Daraus folgt:</p> $E = \frac{1}{6} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$ <p>Der Grenzwert lässt sich auch ohne ClassPad Unterstützung berechnen.</p> $s_n = \frac{1}{6} \left( 1 \cdot \frac{5}{6} + 2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 + \dots \right)$ $\frac{5}{6} \cdot s_n = \frac{1}{6} \left( \left(\frac{5}{6}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 + 3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 + \dots \right)$ $s_n - \frac{5}{6} \cdot s_n = \frac{1}{6} \left( \left(\frac{5}{6}\right) + \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^3 + \dots \right)$ $\rightarrow s_n = \frac{1}{1 - \frac{5}{6}} = 6$	Anzahl	1	2	3	4	Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$	$\frac{5 \cdot 5}{6 \cdot 6} \cdot \frac{1}{6}$	$\frac{5^3}{6^3} \cdot \frac{1}{6}$
Anzahl	1	2	3	4							
Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$	$\frac{5 \cdot 5}{6 \cdot 6} \cdot \frac{1}{6}$	$\frac{5^3}{6^3} \cdot \frac{1}{6}$							

# Die Binomialverteilung

Bezug zum Lehrplan	Screenshot																																																																																					
<p>Inhaltliche Schwerpunkte:</p> <p>Mehrstufige Zufallsexperimente, Urnenmodelle Kenngrößen: Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung</p> <p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <p>(2) untersuchen und beurteilen Stichproben mithilfe von Lage- und Streumaßen, und verwenden das Summenzeichen</p>	 <p>The screenshot shows a TI-84 Plus calculator interface. The top window displays a program named 'vollSer' with the following code:</p> <pre> N For 1 to 100 for 1 to 6 0 → list1[j] next 0 → z while q &lt; 6 list1[1]+list1[2]+list1[3]+list1[4]+list1[5]+list1[6] → q rand(1,6) → w 1 → list1[w] z+1 → z WhileEnd z → list2[k] next     </pre> <p>The bottom window shows a data table with the following values:</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>A</th> <th>B</th> <th>C</th> <th>D</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>19</td><td></td><td>14.2129</td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td>10</td><td>1523</td><td>27.3529</td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td>14</td><td>15.23</td><td>1.5129</td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td>11</td><td></td><td>17.8929</td><td></td></tr> <tr><td>5</td><td>22</td><td>38.9971</td><td>45.8329</td><td></td></tr> <tr><td>6</td><td>11</td><td>6.24477</td><td>17.8929</td><td></td></tr> <tr><td>7</td><td>37</td><td></td><td>473.933</td><td></td></tr> <tr><td>8</td><td>16</td><td></td><td>0.5929</td><td></td></tr> <tr><td>9</td><td>11</td><td></td><td>17.8929</td><td></td></tr> <tr><td>10</td><td>29</td><td></td><td>189.613</td><td></td></tr> <tr><td>11</td><td>25</td><td></td><td>95.4529</td><td></td></tr> <tr><td>12</td><td>9</td><td></td><td>38.8129</td><td></td></tr> <tr><td>13</td><td>19</td><td></td><td>14.2129</td><td></td></tr> <tr><td>14</td><td>13</td><td></td><td>4.9729</td><td></td></tr> <tr><td>15</td><td>23</td><td></td><td>60.3729</td><td></td></tr> <tr><td>16</td><td>15</td><td></td><td>0.0529</td><td></td></tr> </tbody> </table>		A	B	C	D	1	19		14.2129		2	10	1523	27.3529		3	14	15.23	1.5129		4	11		17.8929		5	22	38.9971	45.8329		6	11	6.24477	17.8929		7	37		473.933		8	16		0.5929		9	11		17.8929		10	29		189.613		11	25		95.4529		12	9		38.8129		13	19		14.2129		14	13		4.9729		15	23		60.3729		16	15		0.0529	
	A	B	C	D																																																																																		
1	19		14.2129																																																																																			
2	10	1523	27.3529																																																																																			
3	14	15.23	1.5129																																																																																			
4	11		17.8929																																																																																			
5	22	38.9971	45.8329																																																																																			
6	11	6.24477	17.8929																																																																																			
7	37		473.933																																																																																			
8	16		0.5929																																																																																			
9	11		17.8929																																																																																			
10	29		189.613																																																																																			
11	25		95.4529																																																																																			
12	9		38.8129																																																																																			
13	19		14.2129																																																																																			
14	13		4.9729																																																																																			
15	23		60.3729																																																																																			
16	15		0.0529																																																																																			

Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
<p>Wie ein Programm zu erstellen ist, wurde oben beschrieben.</p> <p><code>list1[j]</code> bezieht sich auf das j-te Element der Liste mit dem Namen list1.</p> <p>Die ersten 6 Zellen von list1 entsprechen den jeweils gewürfelten Augenzahlen. Wenn zum Beispiel eine „4“ gefallen ist, wird die 4. Zelle mit einer 1 belegt. Nur wenn alle Zellen 1 bis 6 mit einer 1 belegt sind, endet der Durchlauf. Durch die <i>For</i>-Schleife gibt es 100 Durchläufe.</p> <p>Mit Hilfe der Import Funktion (Anwendung wie oben) lassen sich die Daten in die Tabellenkalkulation übertragen.</p> <p>B2: = <code>sum(A1:A100)</code>  B3: = <code>B2/100</code></p> <p>C1: = <code>(A1-B3)^2</code>  C2: = <code>(A2-B3)^2</code>  usw.</p> <p>B5: = <code>sum(C1:C100)</code>  B6: = <code>B5^0.5</code></p>	<p><b>Das Problem der vollständigen Serie</b></p> <p>Vor allem bezüglich von Sammelbildern stellt sich die Frage, wie viele Packungen man im Schnitt kaufen muss, um eine vollständige Serie zu erhalten. Wir führen die Simulation bezogen auf ein Würfelmodell durch, das heißt, wie oft muss man im Durchschnitt würfeln, damit alle Zahlen mindestens einmal vorgekommen sind. Mit dem links dargestellten Programm wird eine Serie von 100 Versuchen realisiert.</p> <p>Auch hier lässt sich der Erwartungswert direkt bestimmen. Dazu betrachten wir zunächst nochmals die Frage, wie oft man in der Regel würfeln muss, bis eine „6“ erscheint. Zur Lösung erstellen wir ein Ablaufdiagramm.</p>  <p>Das gesuchte Ereignis A tritt mit der Wahrscheinlichkeit p ein. Falls das Ereignis nicht eingetreten ist, befindet man sich wieder in der Ausgangssituation. Daraus folgt:</p> $E(X) = 1 \cdot p + (1 - p) \cdot (1 + E(X)) \Rightarrow E(X) = \frac{1}{p}$ <p>Dabei gibt die Zufallsvariable X die jeweilige Anzahl der Würfe, bis eine „6“ geworfen wurde, an.</p> <p>Für den ersten Wurf ist es vollkommen egal, welche Zahl gewürfelt wird. Beim zweiten Wurf darf nur die erste Zahl nicht wieder gewürfelt werden. Ist dies der Fall bleibt man in dem Zustand. Das heißt, man kann die Gleichung oben auf jede Position anwenden. Wegen der Linearität der Erwartungswerte sind diese zu addieren.</p> $E(X) = 1 + E(X_2) + E(X_3) + E(X_4) + E(X_5) + E(X_6)$ $= 1 + \frac{6}{5} + \frac{6}{4} + \frac{6}{3} + \frac{6}{2} + \frac{6}{1} = 14,7$ <p>Der simulierte Wert stimmt mit dem theoretischen in der Größenordnung überein.</p>

### Bezug zum Lehrplan

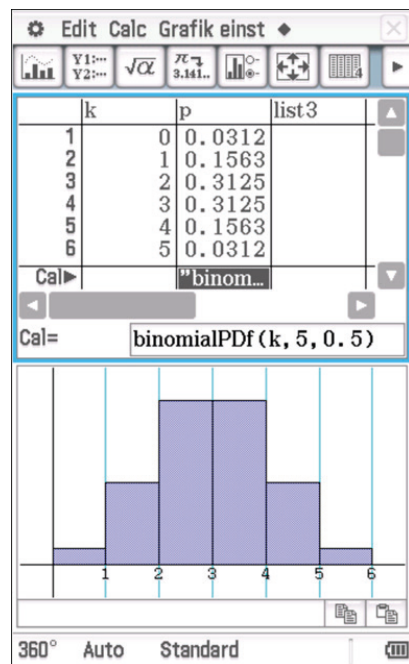
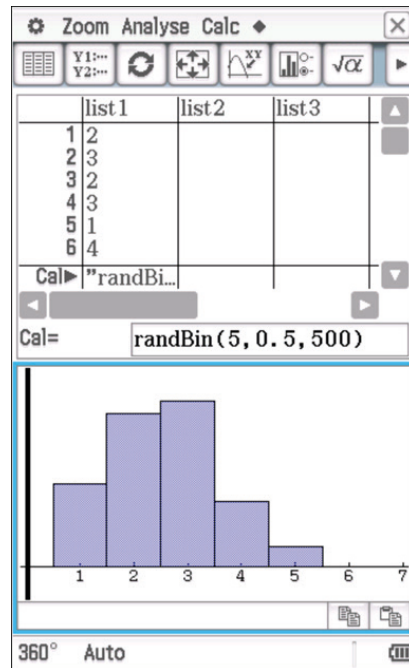
Inhaltliche Schwerpunkte:




Binomialverteilung: Binomialkoeffizient, Kenngrößen, Histogramme,  $\sigma$ -Regeln

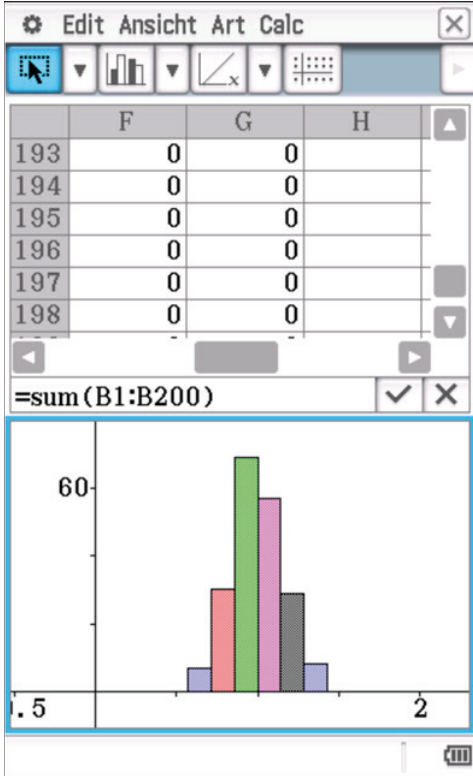
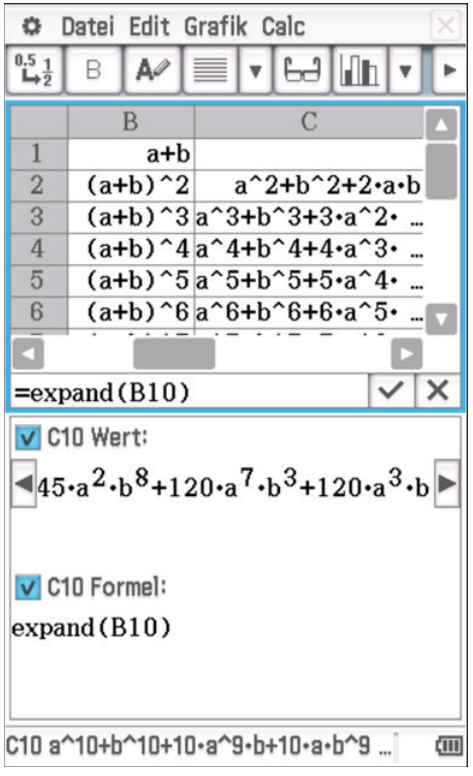
Die Schülerinnen und Schüler



(6) erklären die kombinatorische Bedeutung des Binomialkoeffizienten und berechnen diesen in einfachen Fällen auch ohne Hilfsmittel (nur LK)

### Screenshot



Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik												
<p>Die Simulation wird im Statistik Menü durchgeführt. Man benutzt dazu den <i>randBin</i> Befehl (Diesen findet man über die Tastatur im <i>Katalog</i>) und trägt diesen bei <code>Cal▶"randBi..</code> ein. Die erste Zahl 5 gibt die Anzahl der Würfe an, 0,5 beträgt die Wahrscheinlichkeit für Kopf und die letzte Zahl bezeichnet die Anzahl der Durchführungen.</p> <p>Um das dargestellte Histogramm zu erhalten, ist zunächst <i>Grafik einst</i> -&gt; <i>Einstellung zu wählen</i></p>  <p>Für den Ausdruck:  mit: H-start: 0.5 und H-schritt: 1</p> <p>Die absoluten Zahlen erhält man über <i>Analyse</i> -&gt; <i>Verfolgen</i></p> <p>Die Wahrscheinlichkeiten lassen sich direkt im Statistik Modul bestimmen.</p> <p>Zunächst werden die Spalten umbenannt. Dazu wird der Kopf angeklickt und umbenannt. In die Spalte k müssen die Zahlen 0, 1, ... ,5 händisch eingetragen werden. Unter der Spalte p wird <i>Cal</i> markiert. Danach erfolgt der Eintrag unter <i>Cal=</i> (s. Abb. links) Den Befehl <i>binomialPDef</i> findet man wieder auf der Tastatur im <i>Katalog</i>.</p> <p>Für die Grafik ist wieder, Histogramm zu wählen und <i>X-List:</i> k und <i>Häufigk:</i> p.</p> <p>Für den Ausdruck:  mit: H-start: 0 und H-schritt: 1</p>	<p>In einem Zufallsexperiment wird eine Münze 5-mal geworfen. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Köpfe an. Die gesuchte Anzahl ist binomialverteilt.</p> <p>Das Experiment wird 500-mal durchgeführt. Die Simulation eröffnet die Möglichkeit die erhaltenen Werte mit den theoretischen zu vergleichen.</p> <table border="1" data-bbox="810 631 1380 719"> <tr> <td>0</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>18</td> <td>82</td> <td>152</td> <td>164</td> <td>64</td> <td>20</td> </tr> </table> <p>Im Histogramm erscheint nicht der „Balken“ für 0 Köpfe. Die Anzahl für 0 Köpfe ergibt sich aus: <math>500-82-152-164-64-20=18</math></p> <p>Theoretisch lassen sich die Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe der Binomialverteilung bestimmen. Es gilt</p> $p(X = k) = \binom{5}{k} \cdot 0,5^k \cdot 0,5^{5-k}$ <p>Es ist nicht erforderlich, die obige Formel direkt einzugeben, da der ClassPad für die Berechnung den Befehl <i>binomialPDef</i> implementiert hat.</p> <p>Die Werte lassen sich direkt aus Spalte p ablesen. (s. Abb. links)</p>	0	1	2	3	4	5	18	82	152	164	64	20
0	1	2	3	4	5								
18	82	152	164	64	20								

Bezug zum Lehrplan	Screenshot																					
<p>Inhaltliche Schwerpunkte:</p> <p>Binomialverteilung: Binomialkoeffizient, Kenngrößen, Histogramme, <math>\sigma</math>-Regeln</p> <p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <p>(6) erklären die kombinatorische Bedeutung des Binomialkoeffizienten und berechnen diesen in einfachen Fällen auch ohne Hilfsmittel (nur LK)</p>	 <p>The first screenshot shows a spreadsheet window titled 'Edit Ansicht Art Calc'. It displays a table with columns F, G, and H, and rows 193 to 198. All values in columns G and H are 0. Below the table, a formula bar shows '=sum(B1:B200)'. A histogram is displayed below the spreadsheet, showing a distribution with a peak around 1.5 and a tail extending to 2. The y-axis has a value of 60.</p>  <p>The second screenshot shows a spreadsheet window titled 'Datei Edit Grafik Calc'. It displays a table with columns B and C, and rows 1 to 6. The table contains the following data:</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>B</th> <th>C</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>a+b</td> <td></td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>(a+b)^2</td> <td>a^2+b^2+2*a*b</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>(a+b)^3</td> <td>a^3+b^3+3*a^2*b ...</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>(a+b)^4</td> <td>a^4+b^4+4*a^3*b ...</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>(a+b)^5</td> <td>a^5+b^5+5*a^4*b ...</td> </tr> <tr> <td>6</td> <td>(a+b)^6</td> <td>a^6+b^6+6*a^5*b ...</td> </tr> </tbody> </table> <p>Below the table, a formula bar shows '=expand(B10)'. A dialog box is open, showing the expanded formula for C10: '45*a^2*b^8+120*a^7*b^3+120*a^3*b'. The dialog also shows the formula 'expand(B10)'.</p>		B	C	1	a+b		2	(a+b)^2	a^2+b^2+2*a*b	3	(a+b)^3	a^3+b^3+3*a^2*b ...	4	(a+b)^4	a^4+b^4+4*a^3*b ...	5	(a+b)^5	a^5+b^5+5*a^4*b ...	6	(a+b)^6	a^6+b^6+6*a^5*b ...
	B	C																				
1	a+b																					
2	(a+b)^2	a^2+b^2+2*a*b																				
3	(a+b)^3	a^3+b^3+3*a^2*b ...																				
4	(a+b)^4	a^4+b^4+4*a^3*b ...																				
5	(a+b)^5	a^5+b^5+5*a^4*b ...																				
6	(a+b)^6	a^6+b^6+6*a^5*b ...																				

Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik												
<p>Alternativ lässt sich die Simulation natürlich auch in der Tabellenkalkulation durchführen. Dazu wird die Spalte A mit dem Befehl <code>=randBin(5,0.5)</code> gefüllt. Das Füllen geschieht am einfachsten, wie folgt: <i>Edit -&gt; Füllen -&gt; Mit Wert füllen</i></p> <p>Als Formel ist obige einzusetzen und als Bereich: <code>A1:A200</code>, wenn die Simulation 200-mal durchgeführt werden soll.</p> <p>Die weiteren Spalten dienen der Auswertung. In Spalte B werden die „0“ gezählt. Dies geschieht mit: <code>=piecewise(A1=0,1,0)</code></p> <p>Das bedeutet, wenn A1 den Wert 0 hat, wird der Zelle der Wert 1 zugeordnet. Die Spalte B wird auf die gleiche Art wie oben gefüllt. Entsprechendes gilt für die Spalten C bis G. Für A1 muss dann natürlich jeweils abgefragt werden, ob <math>A1=1</math> bzw. 2 usw...</p> <p>Die Spalten B bis G werden dann einzeln aufsummiert.</p> <p>Für das Histogramm ist die Zeile mit den Summen zu markieren und durch  wird das Histogramm erzeugt.</p> <p>Das CAS des ClassPad lässt sich auch in der Tabellenkalkulation nutzen. In Spalte A stehen die Zahlen 1, 2, ..., 10. Auf diese Spalte wird für die Exponenten Bezug genommen. Man erkennt, dass in Spalte B die Klammern nicht automatisch ausmultipliziert werden. Um dies zu erreichen, steht in C2: <code>=expand(B2)</code>.</p> <p>Um die Spalten zu verbreitern: <i>Edit -&gt; Format -&gt; Automatische Breite</i></p> <p>Für eine genauere Betrachtung ist die jeweilige Zelle (in der Abb. links C10) zu markieren und  zu wählen.</p>	<p>Die Simulation mit der Tabellenkalkulation ist zwar aufwendiger, macht aber für die Schülerinnen und Schüler die erforderlichen Schritte transparenter.</p> <p>Als Ergebnis ergibt sich:</p> <table border="1" data-bbox="810 533 1377 622"> <tr> <td>0</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>33</td> <td>58</td> <td>66</td> <td>32</td> <td>6</td> </tr> </table> <p>Eine Durchführung mit einem Würfel- bzw. Urnenmodell ist nicht wirklich geeignet, da mit diesem nur ein einzelner Durchgang simuliert werden kann.</p> <p>Der Zusammenhang zwischen den Binomialkoeffizienten und den Koeffizienten der erweiterten Binomischen Formeln sollte Thema des Unterrichts sein. Die Schülerinnen und Schüler haben so die Möglichkeit, die kombinatorische Bedeutung des Binomialkoeffizienten in einem eigentlich schon bekannten Zusammenhang zu erfahren.</p>	0	1	2	3	4	5	5	33	58	66	32	6
0	1	2	3	4	5								
5	33	58	66	32	6								

Bezug zum Lehrplan

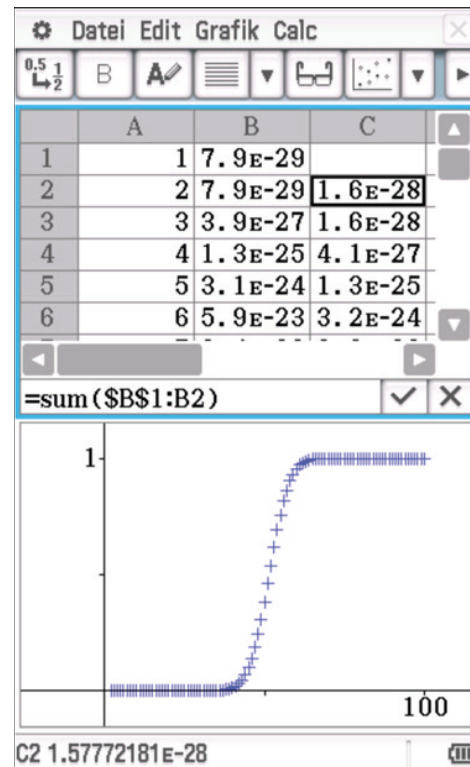
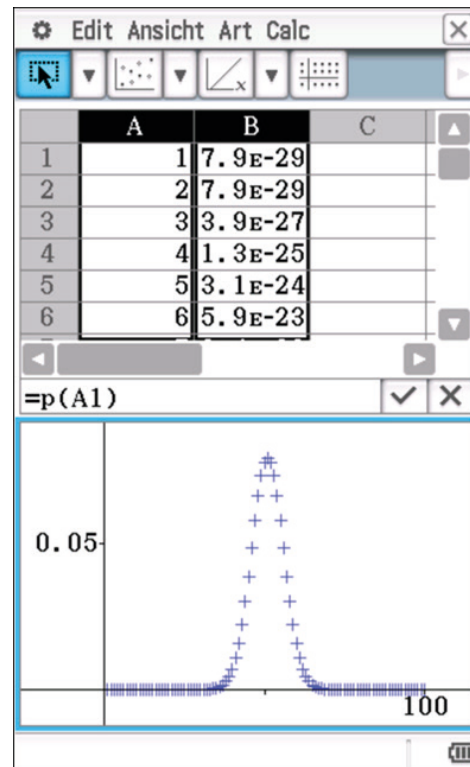
Screenshot

Inhaltliche Schwerpunkte:

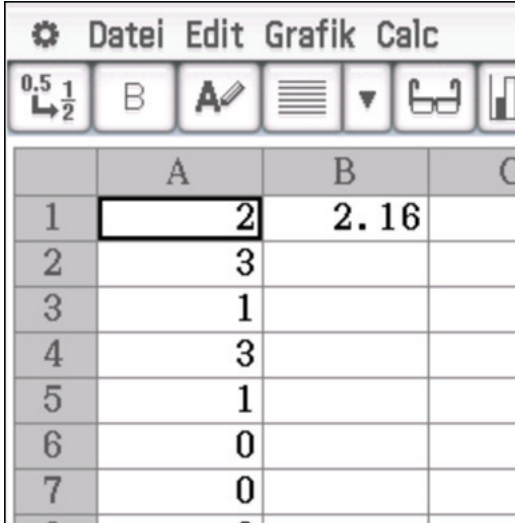
Binomialverteilung: Binomialkoeffizient, Kenngrößen, Histogramme,  $\sigma$ -Regeln

Die Schülerinnen und Schüler

(6) erklären die kombinatorische Bedeutung des Binomialkoeffizienten und berechnen diesen in einfachen Fällen auch ohne Hilfsmittel (nur LK)

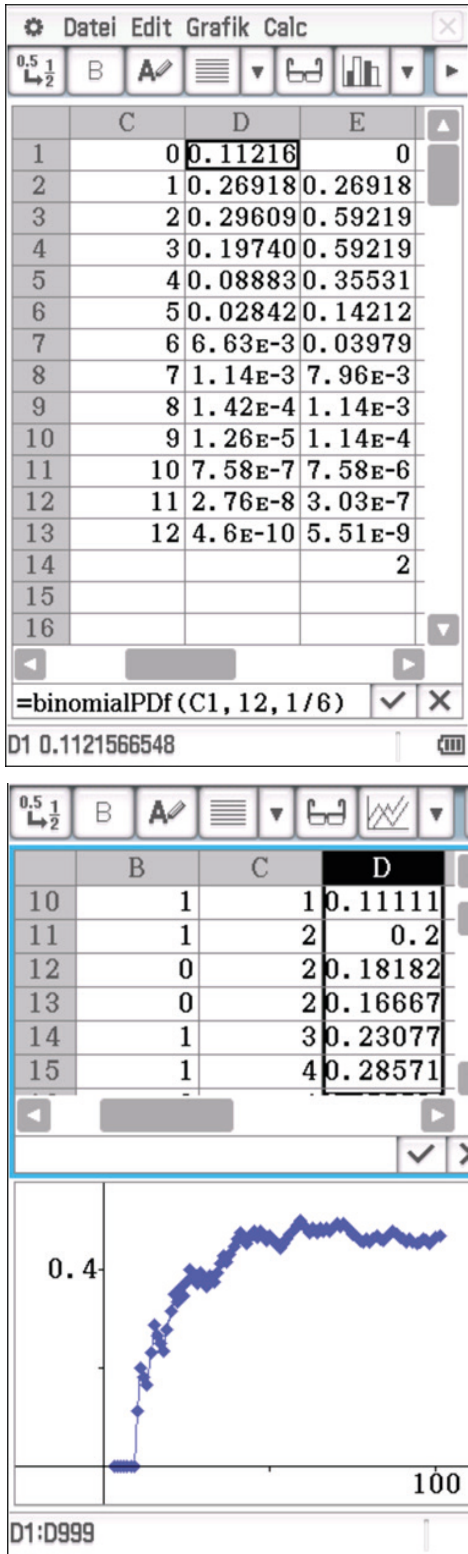


Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
<p>Im Bereich <i>main</i> wurde zunächst die Funktion <math>p(x)</math> definiert:</p> <p><i>Define <math>p(x)=\text{binomialPDF}(x,100,0.5)</math></i></p> <p>Diese Funktion steht einem dann auch in der Tabellenkalkulation zur Verfügung.  In Spalte A stehen die Zahlen 1 bis 100, auf die dann die Funktion <math>p(x)</math> angewandt wird (s. Abb. links).</p> <p>Das Kopieren funktioniert am einfachsten:  A1: 1 -&gt; A2: A1+1 -&gt; A2 markieren  Edit -&gt; Füllen -&gt; Mit Wert füllen  Als Formel erscheint automatisch: A1+1  Bereich: A3:A100  Mit der Spalte B wird entsprechend verfahren.  Für die Grafik werden die Spalten A und B markiert und  gewählt.  Man könnte die Tabelle so gestalten, dass man Werte für beliebige Einzelwahrscheinlichkeiten bekommt. Es ist dann im <i>main</i> folgendes zu definieren:</p> <p><i>Define <math>p(x,y)=\text{binomialPDF}(x,100,y)</math></i></p> <p>In C1: der Wert für die Einzelwahrscheinlichkeit  In B1: <math>=p(A1,\\$C\\$1)</math>  Durch eine Änderung des Wertes in C1 werden dann die Werte in Spalte B entsprechend geändert.</p> <p>Aus der obigen Tabelle lassen sich leicht die Werte für die kumulierte Binomialverteilung erzeugen (s. Abb. links).  Dazu wird eine weitere Spalte angelegt (s. Abb. links)  C2: <math>=\text{sum}(\\$B\\$1,B2)</math>  Durch das \$ bleibt der erste Wert fest und die Summation erfolgt bis zum zweiten Wert.  Klickt man die Kreuze in der Abbildung links direkt mit dem Stift an, so wird der Wert unten links angezeigt. Man kann so zum Beispiel relativ einfach herausfinden, ab welchem x die Wahrscheinlichkeit <math>p \geq 50\%</math> ist.</p>	<p>Mit Unterstützung des ClassPads lassen sich natürlich auch Wertetabellen für die Binomialverteilung erstellen und die Verteilung grafisch darstellen.</p> <p>Gleiches gilt für die kumulierte Binomialverteilung.</p>

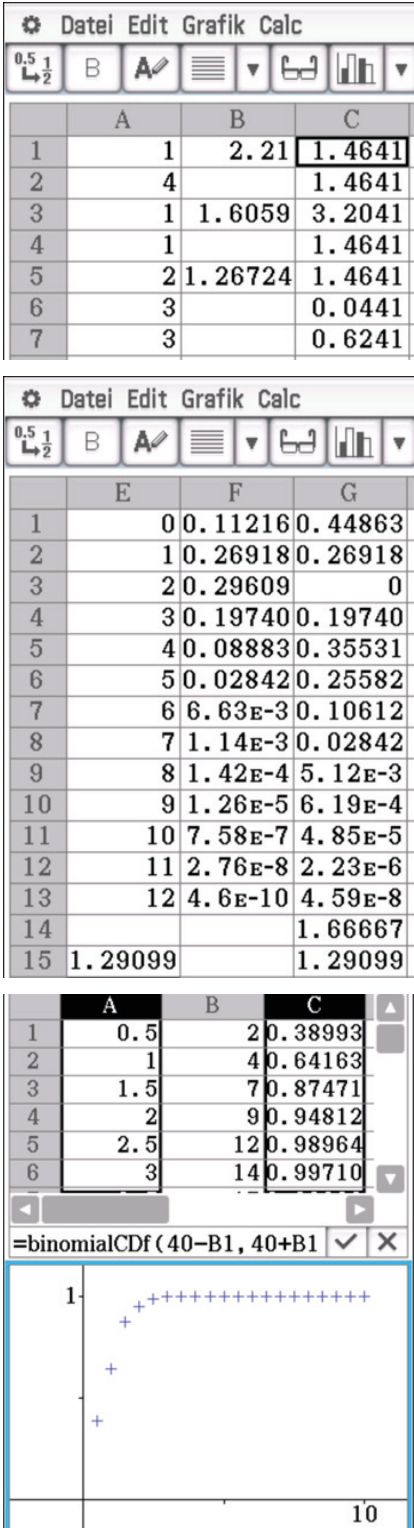
Bezug zum Lehrplan	Screenshot
<p>Inhaltliche Schwerpunkte:</p> <p>Kenngößen: Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung            Binomialverteilung: Binomialkoeffizient, Kenngößen, Histogramme, <math>\sigma</math> -Regeln</p>	<p>binomialPDf (50, 105, 0.43) 0.04940481993</p> <p>binomialPDf (50, 500, 0.43) 1.518974684E-59</p> <p>binomialCDF (100, 200, 500, 0.43) 0.09484355007</p> <p>BinomialCDF (0.05, 500, 0.43) 197</p> <p>binomialCDF (0.475, 500, 0.43) 214</p> <p>binomialPDf (215, 500, 0.43) 0.03601890225</p> 


Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
<p>Den Befehl <i>binomialPDF</i> findet man im Katalog. Man kann ihn aber auch direkt buchstabenmäßig eingeben oder:  <i>Main -&gt; Interaktiv -&gt; Verteilungsfunktionen -&gt; Diskret -&gt; binomialPDF</i></p> <p>Den Befehl für die kumulierte Binomialverteilung findet man ebenfalls auf die gleiche Art wie oben. Die ersten beiden Werte geben die Grenzen, der dritte die Anzahl der Durchläufe und der letzte die Wahrscheinlichkeit an.</p> <p>Der Befehl für die Umkehrfunktion lautet: <i>InvBinomialCDF</i>. Für die Eingabe gilt im Prinzip das gleiche wie oben. Es ist dann <i>Umkehrfkt.</i> anstatt <i>Diskret</i> zu wählen.</p> <p>Die Spalte A wird durch den Befehl <i>=randbin(12,1/6)</i> erzeugt. Dies wird zunächst in A1 eingetragen.  A1 markieren  <i>Edit -&gt; Füllen -&gt; Mit Wert füllen</i>  Als Formel ist schon obiges eingetragen.  Bereich: A2:A100</p> <p>B1: <i>=mean(A1:A100)</i></p>	<p>Im Gegensatz zu Formelsammlungen lassen sich Wahrscheinlichkeiten für die Binomialverteilung mit dem CAS für beliebige Werte bestimmen.</p> <p>Des Weiteren wird für die Schülerinnen und Schüler aus dem zweiten Wert ersichtlich, dass es keinen Sinn macht, nach der Wahrscheinlichkeit für eine bestimmte Trefferanzahl zu fragen, wenn die Anzahl der Durchläufe hinreichend groß ist. Deswegen wird sich eher die Frage stellen, wie groß die Wahrscheinlichkeit für ein Intervall ist, so dass die Anzahl der Treffer Element des Intervalls ist. Ergebnisse liefert die kumulierte Binomialverteilung.</p> <p>Des Weiteren könnte sich die Frage ergeben, wie groß ein Intervall sein müsste, damit die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer aus dem Intervall zum Beispiel 5% beträgt. Die Antwort wird durch die inverse Verteilungsfunktion gegeben.  Genau wie bei der Arbeit mit Tabellen beziehen sich die Werte auf Intervalle [0; ...]  Wenn man das 5% Intervall um den Erwartungswert sucht, muss man das Intervall <math>I = [0, k]</math> suchen, so dass <math>p(I) = 0,475</math>.</p> <p>Als Ergebnis erhält man <math>I = [215,215]</math>  Vergleicht man dies mit der Wahrscheinlichkeit für höchstens 215 Treffer, so ergibt sich nicht der Wert von 5%.</p> <p>Für Schülerinnen und Schüler ist es wichtig zu erfahren, dass es unter Umständen keine exakten Lösungen gibt, da es sich ja um eine diskrete Verteilung handelt.  Ein Würfel wird 12-mal geworfen und die Anzahl der „6“ bestimmt. Das Ganze wird 100-mal durchgeführt. Wir interessieren uns dafür, wie oft die Zahl 6 im Mittel auftritt.  Es ergibt sich ein durchschnittlicher Wert von <math>E = 2,16</math>.</p> <p>Dieser Wert wird verglichen mit dem Erwartungswert der Binomialverteilung.  (Fortsetzung auf den nächsten Seiten)</p>

# Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung bzgl. der Binomialverteilung

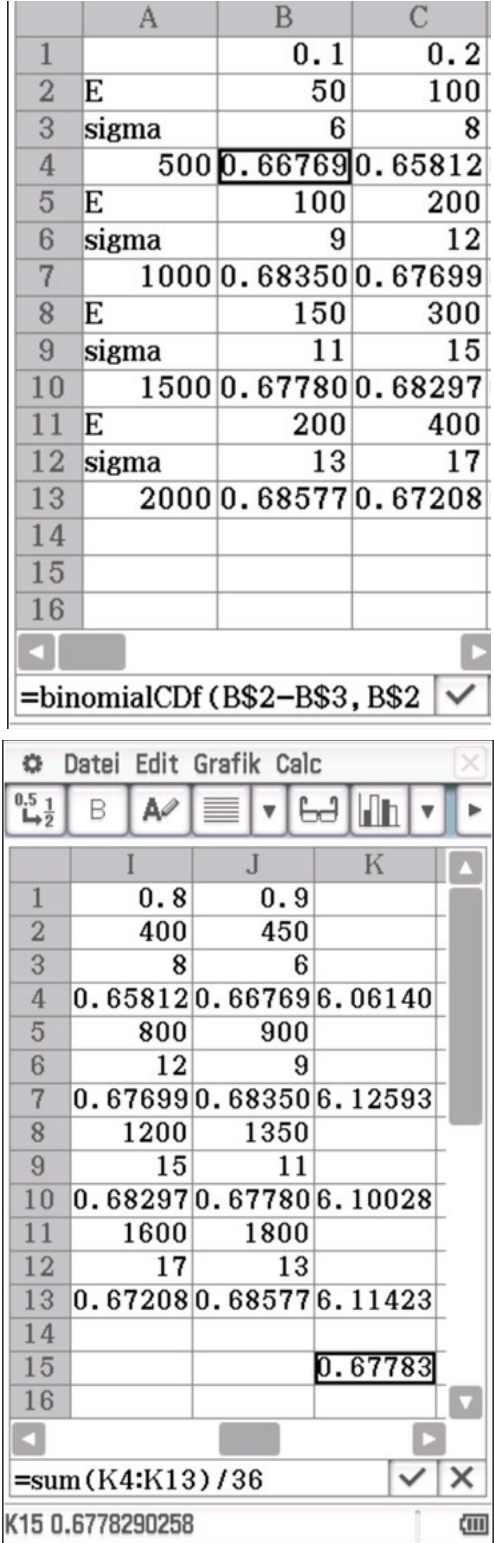
Bezug zum Lehrplan	Screenshot																																																																																								
<p>Inhaltliche Schwerpunkte:</p> <p>Kenngößen: Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung            Binomialverteilung: Binomialkoeffizient, Kenngößen, Histogramme, <math>\sigma</math>-Regeln</p> <p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <p>(3) verwenden Simulationen zur Untersuchung stochastischer Situationen und nutzen dabei auch digitale Mathematikwerkzeuge</p>	 <p>The screenshot shows a spreadsheet with two tables of data and a simulation graph. The first table shows the probability mass function for a binomial distribution with n=12 and p=1/6. The second table shows the results of a simulation with n=10 trials. The graph shows a simulated path of a binomial process over 100 trials, with the y-axis labeled 0.4 and the x-axis labeled 100.</p> <table border="1" data-bbox="847 555 1316 1093"> <thead> <tr> <th></th> <th>C</th> <th>D</th> <th>E</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>0</td><td>0.11216</td><td>0</td></tr> <tr><td>2</td><td>1</td><td>0.26918</td><td>0.26918</td></tr> <tr><td>3</td><td>2</td><td>0.29609</td><td>0.59219</td></tr> <tr><td>4</td><td>3</td><td>0.19740</td><td>0.59219</td></tr> <tr><td>5</td><td>4</td><td>0.08883</td><td>0.35531</td></tr> <tr><td>6</td><td>5</td><td>0.02842</td><td>0.14212</td></tr> <tr><td>7</td><td>6</td><td>6.63E-3</td><td>0.03979</td></tr> <tr><td>8</td><td>7</td><td>1.14E-3</td><td>7.96E-3</td></tr> <tr><td>9</td><td>8</td><td>1.42E-4</td><td>1.14E-3</td></tr> <tr><td>10</td><td>9</td><td>1.26E-5</td><td>1.14E-4</td></tr> <tr><td>11</td><td>10</td><td>7.58E-7</td><td>7.58E-6</td></tr> <tr><td>12</td><td>11</td><td>2.76E-8</td><td>3.03E-7</td></tr> <tr><td>13</td><td>12</td><td>4.6E-10</td><td>5.51E-9</td></tr> <tr><td>14</td><td></td><td></td><td>2</td></tr> </tbody> </table> <table border="1" data-bbox="847 1294 1316 1547"> <thead> <tr> <th></th> <th>B</th> <th>C</th> <th>D</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>10</td><td>1</td><td>1</td><td>0.11111</td></tr> <tr><td>11</td><td>1</td><td>2</td><td>0.2</td></tr> <tr><td>12</td><td>0</td><td>2</td><td>0.18182</td></tr> <tr><td>13</td><td>0</td><td>2</td><td>0.16667</td></tr> <tr><td>14</td><td>1</td><td>3</td><td>0.23077</td></tr> <tr><td>15</td><td>1</td><td>4</td><td>0.28571</td></tr> </tbody> </table>		C	D	E	1	0	0.11216	0	2	1	0.26918	0.26918	3	2	0.29609	0.59219	4	3	0.19740	0.59219	5	4	0.08883	0.35531	6	5	0.02842	0.14212	7	6	6.63E-3	0.03979	8	7	1.14E-3	7.96E-3	9	8	1.42E-4	1.14E-3	10	9	1.26E-5	1.14E-4	11	10	7.58E-7	7.58E-6	12	11	2.76E-8	3.03E-7	13	12	4.6E-10	5.51E-9	14			2		B	C	D	10	1	1	0.11111	11	1	2	0.2	12	0	2	0.18182	13	0	2	0.16667	14	1	3	0.23077	15	1	4	0.28571
	C	D	E																																																																																						
1	0	0.11216	0																																																																																						
2	1	0.26918	0.26918																																																																																						
3	2	0.29609	0.59219																																																																																						
4	3	0.19740	0.59219																																																																																						
5	4	0.08883	0.35531																																																																																						
6	5	0.02842	0.14212																																																																																						
7	6	6.63E-3	0.03979																																																																																						
8	7	1.14E-3	7.96E-3																																																																																						
9	8	1.42E-4	1.14E-3																																																																																						
10	9	1.26E-5	1.14E-4																																																																																						
11	10	7.58E-7	7.58E-6																																																																																						
12	11	2.76E-8	3.03E-7																																																																																						
13	12	4.6E-10	5.51E-9																																																																																						
14			2																																																																																						
	B	C	D																																																																																						
10	1	1	0.11111																																																																																						
11	1	2	0.2																																																																																						
12	0	2	0.18182																																																																																						
13	0	2	0.16667																																																																																						
14	1	3	0.23077																																																																																						
15	1	4	0.28571																																																																																						

Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
<p> C1:0  C2: =C1+1  C2 markieren -&gt; Edit -&gt; Kopieren -&gt;  C3 bis C13 markieren -&gt; Edit -&gt; Einfügen  D1: =binomialPDF(C1,12,1/6)  Füllen des Restes der Spalte D entsprechend wie bei Spalte C  E1: =C1*D1  Füllen wie oben  E14: =sum(E1:E13) </p> <p> In der Spalte A stehen die Zahlen 1 bis 100.  Spalte B: =rand(0,1)  Spalte C: In dieser Spalte werden die „1“ aus Spalte B bis zu der jeweiligen Zelle Cn addiert. Dies gelingt durch: =sum(\$B\$1:Bn)  In Spalte D stehen die Quotienten aus Spalte A und C </p>	<p> In Spalte A sind die möglichen Ergebnisse des Ausgangs, wenn 12-mal gewürfelt wird und die Anzahl der „6“ gezählt wird.  In Spalte B sind die mit Hilfe der Binomialverteilung berechneten Werte der Wahrscheinlichkeit aufgeführt. Nach Definition des Erwartungswertes werden diese mit der Anzahl des Auftretens multipliziert und addiert. Das Ergebnis steht in Zelle E14 (s. Abb. links)  Es ergibt sich eine gewisse Abweichung zwischen dem theoretischen und dem experimentell gewonnenen Wert. Schülerinnen und Schüler können so erfahren, dass sich der experimentelle Wert der „2“ annähert, wenn die Anzahl der Simulationen erhöht wird. </p> <p> Für eine Visualisierung des empirischen Gesetzes der großen Zahlen eignet sich eher die folgende Simulation:  Es wird ein Münzwurf simuliert, wobei der Zahl die „0“ und dem Kopf die „1“ zugeordnet wird. Die Münze wird 100-mal geworfen und nach jedem Wurf werden die „1“ aufaddiert. Dadurch lässt sich die relative Häufigkeit für das Auftreten von Kopf bestimmen. Die Schülerinnen und Schüler können erkennen, dass sich der Wert stabilisiert und sich einem Grenzwert annähert. Es ist erforderlich zu diskutieren, dass dies kein Grenzwert im Sinne der Analysis ist. </p>

Bezug zum Lehrplan	Screenshot																																																																																																																												
<p>Inhaltliche Schwerpunkte:</p> <p>Kenngößen: Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung            Binomialverteilung: Binomialkoeffizient, Kenngößen, Histogramme, <math>\sigma</math>-Regeln</p> <p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <p>(3) verwenden Simulationen zur Untersuchung stochastischer Situationen und nutzen dabei auch digitale Mathematikwerkzeuge</p>	 <p>The screenshot displays three tables of data from a spreadsheet application. The first table shows values for columns A, B, and C. The second table shows values for columns E, F, and G. The third table shows values for columns A, B, and C. Below the tables, a formula bar shows the function <code>=binomialCDF(40-B1, 40+B1)</code>. At the bottom, a histogram is visible with a y-axis labeled '1' and an x-axis labeled '10'.</p> <table border="1" data-bbox="884 412 1299 667"> <thead> <tr> <th></th> <th>A</th> <th>B</th> <th>C</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>1</td><td>2.21</td><td>1.4641</td></tr> <tr><td>2</td><td>4</td><td></td><td>1.4641</td></tr> <tr><td>3</td><td>1</td><td>1.6059</td><td>3.2041</td></tr> <tr><td>4</td><td>1</td><td></td><td>1.4641</td></tr> <tr><td>5</td><td>2</td><td>1.26724</td><td>1.4641</td></tr> <tr><td>6</td><td>3</td><td></td><td>0.0441</td></tr> <tr><td>7</td><td>3</td><td></td><td>0.6241</td></tr> </tbody> </table> <table border="1" data-bbox="884 779 1299 1281"> <thead> <tr> <th></th> <th>E</th> <th>F</th> <th>G</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>0</td><td>0.11216</td><td>0.44863</td></tr> <tr><td>2</td><td>1</td><td>0.26918</td><td>0.26918</td></tr> <tr><td>3</td><td>2</td><td>0.29609</td><td>0</td></tr> <tr><td>4</td><td>3</td><td>0.19740</td><td>0.19740</td></tr> <tr><td>5</td><td>4</td><td>0.08883</td><td>0.35531</td></tr> <tr><td>6</td><td>5</td><td>0.02842</td><td>0.25582</td></tr> <tr><td>7</td><td>6</td><td>6.63E-3</td><td>0.10612</td></tr> <tr><td>8</td><td>7</td><td>1.14E-3</td><td>0.02842</td></tr> <tr><td>9</td><td>8</td><td>1.42E-4</td><td>5.12E-3</td></tr> <tr><td>10</td><td>9</td><td>1.26E-5</td><td>6.19E-4</td></tr> <tr><td>11</td><td>10</td><td>7.58E-7</td><td>4.85E-5</td></tr> <tr><td>12</td><td>11</td><td>2.76E-8</td><td>2.23E-6</td></tr> <tr><td>13</td><td>12</td><td>4.6E-10</td><td>4.59E-8</td></tr> <tr><td>14</td><td></td><td></td><td>1.66667</td></tr> <tr><td>15</td><td>1.29099</td><td></td><td>1.29099</td></tr> </tbody> </table> <table border="1" data-bbox="884 1303 1299 1496"> <thead> <tr> <th></th> <th>A</th> <th>B</th> <th>C</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>0.5</td><td>2</td><td>0.38993</td></tr> <tr><td>2</td><td>1</td><td>4</td><td>0.64163</td></tr> <tr><td>3</td><td>1.5</td><td>7</td><td>0.87471</td></tr> <tr><td>4</td><td>2</td><td>9</td><td>0.94812</td></tr> <tr><td>5</td><td>2.5</td><td>12</td><td>0.98964</td></tr> <tr><td>6</td><td>3</td><td>14</td><td>0.99710</td></tr> </tbody> </table> <p>Formula bar: <code>=binomialCDF(40-B1, 40+B1)</code></p> <p>Histogram: y-axis '1', x-axis '10'</p>		A	B	C	1	1	2.21	1.4641	2	4		1.4641	3	1	1.6059	3.2041	4	1		1.4641	5	2	1.26724	1.4641	6	3		0.0441	7	3		0.6241		E	F	G	1	0	0.11216	0.44863	2	1	0.26918	0.26918	3	2	0.29609	0	4	3	0.19740	0.19740	5	4	0.08883	0.35531	6	5	0.02842	0.25582	7	6	6.63E-3	0.10612	8	7	1.14E-3	0.02842	9	8	1.42E-4	5.12E-3	10	9	1.26E-5	6.19E-4	11	10	7.58E-7	4.85E-5	12	11	2.76E-8	2.23E-6	13	12	4.6E-10	4.59E-8	14			1.66667	15	1.29099		1.29099		A	B	C	1	0.5	2	0.38993	2	1	4	0.64163	3	1.5	7	0.87471	4	2	9	0.94812	5	2.5	12	0.98964	6	3	14	0.99710
	A	B	C																																																																																																																										
1	1	2.21	1.4641																																																																																																																										
2	4		1.4641																																																																																																																										
3	1	1.6059	3.2041																																																																																																																										
4	1		1.4641																																																																																																																										
5	2	1.26724	1.4641																																																																																																																										
6	3		0.0441																																																																																																																										
7	3		0.6241																																																																																																																										
	E	F	G																																																																																																																										
1	0	0.11216	0.44863																																																																																																																										
2	1	0.26918	0.26918																																																																																																																										
3	2	0.29609	0																																																																																																																										
4	3	0.19740	0.19740																																																																																																																										
5	4	0.08883	0.35531																																																																																																																										
6	5	0.02842	0.25582																																																																																																																										
7	6	6.63E-3	0.10612																																																																																																																										
8	7	1.14E-3	0.02842																																																																																																																										
9	8	1.42E-4	5.12E-3																																																																																																																										
10	9	1.26E-5	6.19E-4																																																																																																																										
11	10	7.58E-7	4.85E-5																																																																																																																										
12	11	2.76E-8	2.23E-6																																																																																																																										
13	12	4.6E-10	4.59E-8																																																																																																																										
14			1.66667																																																																																																																										
15	1.29099		1.29099																																																																																																																										
	A	B	C																																																																																																																										
1	0.5	2	0.38993																																																																																																																										
2	1	4	0.64163																																																																																																																										
3	1.5	7	0.87471																																																																																																																										
4	2	9	0.94812																																																																																																																										
5	2.5	12	0.98964																																																																																																																										
6	3	14	0.99710																																																																																																																										

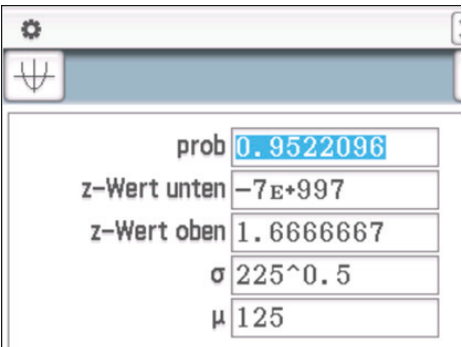
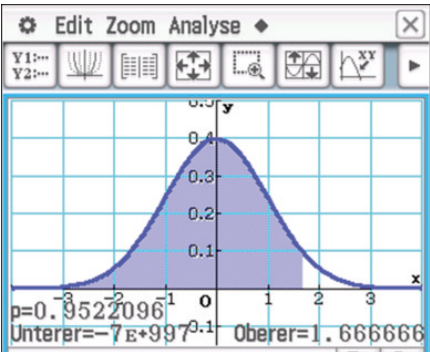
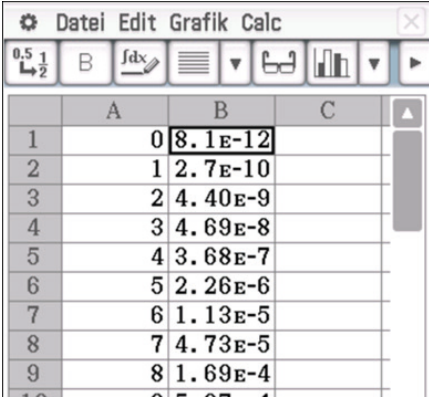
Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
<p>Die Spalte A wurde, wie auf S. 98 beschrieben erzeugt.  C1: <math>=(\\$B\\$1-A1)^2</math>  B1: <math>=\text{mean}(A1:A100)</math>  Die restlichen Zellen der Spalte C wurden dann durch das Kopieren von C1 gefüllt.  B3: <math>=\text{mean}(C1:C100)</math>  B5: <math>=\sqrt{B3}</math></p> <p>Die Spalten E und F entsprechen den Spalten C und D in der Abbildung, S. 99 oben.  G1: <math>=F1*(2-E1)^2</math>  Die „2“ wurde von oben übernommen. Die anderen Zellen von Spalte G sind entsprechend gefüllt.  G14: <math>=\text{mean}(G1:G13)</math>  G15: <math>=\sqrt{G14}</math>  E15: <math>=\sqrt{12 * \frac{1}{6} * \frac{5}{6}}</math></p> <p>A1: 0.5  A2: <math>=A1+0.5</math>  B1: <math>=\text{Int}(A1*\sqrt{(100*0.4*0.6)})</math>  Dies ist erforderlich, da die Grenzen für die Binomialverteilung nur ganzzahlig sein können.  -&gt; B1 markieren -&gt; Edit -&gt; Füllen -&gt; Mit Wert füllen  Die Formel wird automatisch wegen der Markierung von B1 eingesetzt.  Bereich: B1:B20  C1: <math>=\text{binomialCDF}(40-B1,40+B1,100,0.4)</math>  Auffüllen entsprechend oben  Spalte A und C markieren und  wählen.</p>	<p>Wir beziehen uns nach wie vor auf das Werfen eines Würfels.  Dafür werden Varianz und Standardabweichung einmal mit Hilfe der Simulation und einmal theoretisch bestimmt.</p> <p>Es zeigt sich, dass die Werte ganz gut übereinstimmen.</p> <p>Die zweite Tabelle bestätigt anhand eines Beispiels, dass die Standardabweichung direkt berechenbar ist.  Es gilt: <math>\sigma = \sqrt{(n \cdot p \cdot (1-p))}</math></p> <p>Wir wollen als nächstes untersuchen, wie sich die Wahrscheinlichkeiten in Bezug auf <math>\sigma</math>-Umgebungen um den Erwartungswert verhalten. Es werden dazu folgende Intervalle betrachtet:  <math>[\mu-0,5\sigma; \mu+0,5\sigma], [\mu-\sigma; \mu+\sigma], \dots</math>  <math>[\mu-10\sigma; \mu+10\sigma]</math>  Als Beispiel wählen wir eine Binomialverteilung mit <math>n = 100</math> und <math>p = 0,4</math>  Ein entsprechendes Verhalten gilt auch für Binomialverteilungen mit anderen Kennzahlen.</p>


# Die Normalverteilung

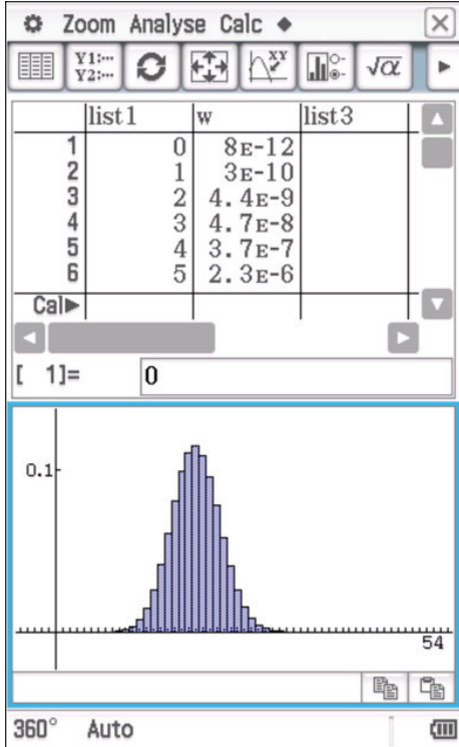
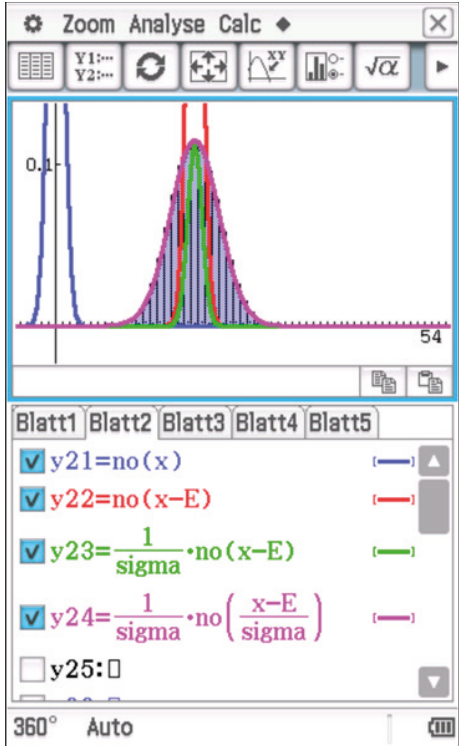
Bezug zum Lehrplan	Screenshot																																																																																																																																								
<p>Inhaltliche Schwerpunkte:</p> <p>Kenngößen: Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung            Binomialverteilung: Binomialkoeffizient, Kenngößen, Histogramme, <math>\sigma</math>-Regeln</p> <p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <p>(12) erklären die Binomialverteilung und beschreiben den Einfluss der Parameter <math>n</math> und <math>p</math> auf die Binomialverteilung, ihre Kenngößen und die graphische Darstellung,</p> <p>(13) nutzen die Binomialverteilung und ihre Kenngößen zur Beschreibung von Zufallsexperimenten und zur Lösung von Problemstellungen</p>	 <p>The screenshot displays two Excel spreadsheets. The top spreadsheet shows a table with columns A, B, and C, and rows 1 through 16. The data in this table is as follows:</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>A</th> <th>B</th> <th>C</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td></td><td>0.1</td><td>0.2</td></tr> <tr><td>2</td><td>E</td><td>50</td><td>100</td></tr> <tr><td>3</td><td>sigma</td><td>6</td><td>8</td></tr> <tr><td>4</td><td>500</td><td>0.66769</td><td>0.65812</td></tr> <tr><td>5</td><td>E</td><td>100</td><td>200</td></tr> <tr><td>6</td><td>sigma</td><td>9</td><td>12</td></tr> <tr><td>7</td><td>1000</td><td>0.68350</td><td>0.67699</td></tr> <tr><td>8</td><td>E</td><td>150</td><td>300</td></tr> <tr><td>9</td><td>sigma</td><td>11</td><td>15</td></tr> <tr><td>10</td><td>1500</td><td>0.67780</td><td>0.68297</td></tr> <tr><td>11</td><td>E</td><td>200</td><td>400</td></tr> <tr><td>12</td><td>sigma</td><td>13</td><td>17</td></tr> <tr><td>13</td><td>2000</td><td>0.68577</td><td>0.67208</td></tr> <tr><td>14</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>15</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>16</td><td></td><td></td><td></td></tr> </tbody> </table> <p>The formula bar shows: <code>=binomialCdf (B\$2-B\$3, B\$2)</code></p> <p>The bottom spreadsheet shows a table with columns I, J, and K, and rows 1 through 16. The data in this table is as follows:</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>I</th> <th>J</th> <th>K</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>0.8</td><td>0.9</td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td>400</td><td>450</td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td>8</td><td>6</td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td>0.65812</td><td>0.66769</td><td>6.06140</td></tr> <tr><td>5</td><td>800</td><td>900</td><td></td></tr> <tr><td>6</td><td>12</td><td>9</td><td></td></tr> <tr><td>7</td><td>0.67699</td><td>0.68350</td><td>6.12593</td></tr> <tr><td>8</td><td>1200</td><td>1350</td><td></td></tr> <tr><td>9</td><td>15</td><td>11</td><td></td></tr> <tr><td>10</td><td>0.68297</td><td>0.67780</td><td>6.10028</td></tr> <tr><td>11</td><td>1600</td><td>1800</td><td></td></tr> <tr><td>12</td><td>17</td><td>13</td><td></td></tr> <tr><td>13</td><td>0.67208</td><td>0.68577</td><td>6.11423</td></tr> <tr><td>14</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>15</td><td></td><td></td><td>0.67783</td></tr> <tr><td>16</td><td></td><td></td><td></td></tr> </tbody> </table> <p>The formula bar shows: <code>=sum (K4:K13) / 36</code></p> <p>The status bar shows: <code>K15 0.6778290258</code></p>		A	B	C	1		0.1	0.2	2	E	50	100	3	sigma	6	8	4	500	0.66769	0.65812	5	E	100	200	6	sigma	9	12	7	1000	0.68350	0.67699	8	E	150	300	9	sigma	11	15	10	1500	0.67780	0.68297	11	E	200	400	12	sigma	13	17	13	2000	0.68577	0.67208	14				15				16					I	J	K	1	0.8	0.9		2	400	450		3	8	6		4	0.65812	0.66769	6.06140	5	800	900		6	12	9		7	0.67699	0.68350	6.12593	8	1200	1350		9	15	11		10	0.68297	0.67780	6.10028	11	1600	1800		12	17	13		13	0.67208	0.68577	6.11423	14				15			0.67783	16			
	A	B	C																																																																																																																																						
1		0.1	0.2																																																																																																																																						
2	E	50	100																																																																																																																																						
3	sigma	6	8																																																																																																																																						
4	500	0.66769	0.65812																																																																																																																																						
5	E	100	200																																																																																																																																						
6	sigma	9	12																																																																																																																																						
7	1000	0.68350	0.67699																																																																																																																																						
8	E	150	300																																																																																																																																						
9	sigma	11	15																																																																																																																																						
10	1500	0.67780	0.68297																																																																																																																																						
11	E	200	400																																																																																																																																						
12	sigma	13	17																																																																																																																																						
13	2000	0.68577	0.67208																																																																																																																																						
14																																																																																																																																									
15																																																																																																																																									
16																																																																																																																																									
	I	J	K																																																																																																																																						
1	0.8	0.9																																																																																																																																							
2	400	450																																																																																																																																							
3	8	6																																																																																																																																							
4	0.65812	0.66769	6.06140																																																																																																																																						
5	800	900																																																																																																																																							
6	12	9																																																																																																																																							
7	0.67699	0.68350	6.12593																																																																																																																																						
8	1200	1350																																																																																																																																							
9	15	11																																																																																																																																							
10	0.68297	0.67780	6.10028																																																																																																																																						
11	1600	1800																																																																																																																																							
12	17	13																																																																																																																																							
13	0.67208	0.68577	6.11423																																																																																																																																						
14																																																																																																																																									
15			0.67783																																																																																																																																						
16																																																																																																																																									



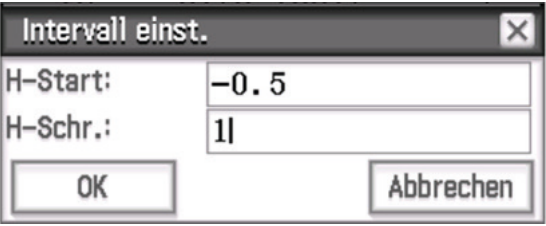


Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
<p>Die Tabelle ist so aufgebaut, dass in Zeile 1 die Einzelwahrscheinlichkeiten (0.1, 0.2, ...,0.9) aufgeführt sind. Die Anzahlen stehen in A4, A7, A10 und A13. In den Zeilen 2, 5, 8 und 11 sind jeweils die Erwartungswerte bezogen auf die Zelle in Zeile 1 und die entsprechenden Anzahlen berechnet. Entsprechendes gilt für die Standardabweichung in der Zeile darunter. Die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten werden in den Zeilen 4, 7, 10 und 13 berechnet.</p> <p>B4:  <code>=binomialCdf(B\$2-B\$3,B\$2+B\$3,\$A4,B\$1)</code>  Die Formel ist so aufgebaut, dass die Zelle sowohl entsprechend in die Spalte B als auch in die Zeilen 4, 7, 10 und 13 kopiert werden kann.</p> <p>In Spalte K werden die Summen der jeweiligen Zeilen bestimmt  K4: <code>=sum(B4:J4)</code>  Aus diesen 4 Summen wird dann die gesamte Summe gebildet und durch die Anzahl der Daten dividiert und so der Durchschnittswert bestimmt.</p> <p>In der Tabelle links ist nur die Zelle B4 zu ändern, indem man vor die Erwähnung der Zelle B\$3 jeweils eine 2 bzw. eine 3 setzt. Alles andere ergibt sich von selbst.  Man hätte auch eine zusätzliche Zelle einfügen können, auf die als Faktor vor dem Wert von sigma Bezug genommen wird.  Dann bräuchte man nur noch in diese Zelle 1, 2 oder 3 einzusetzen.</p>	<p>Für einen späteren Vergleich mit der Normalverteilung ist es interessant, die Wahrscheinlichkeiten für die Binomialverteilung bezogen auf die Sigma Umgebungen berechnen zu lassen.  Da keine Einzelwahrscheinlichkeiten und Anzahlen von vornherein gegeben sind, können diese nicht wie bei der Normalverteilung allgemein berechnet werden, sondern es müssen diese vorgegeben werden. Wir berechnen den Erwartungswert und die Standardabweichung für <math>p=0,1;0,2;\dots;0,9</math> und <math>n=500;1000;1500;2000</math> (s. Abb. links)</p> <p>Wir erhalten als Durchschnittswert  <math>P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,67783</math></p> <p>Vergleicht man diesen Wert mit dem der Normalverteilung (s. S. 117), so erkennt man, dass diese sehr nahe beieinander liegen.</p> <p>Entsprechende Tabellen kann man für die <math>2\sigma</math> und <math>3\sigma</math> Umgebungen berechnen lassen.</p>

# Der Zusammenhang zwischen Normal- und Binomialverteilung

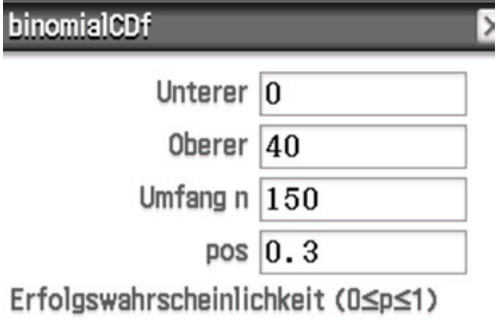
Bezug zum Lehrplan	Screenshot																																								
<p>Nur LK:            Inhaltliche Schwerpunkte:            Normalverteilung: Dichtefunktion („Gauß’sche Glockenkurve“), Parameter <math>\mu</math> und <math>\sigma</math>, Graph der Verteilungsfunktion</p> <p>nur LK:            Die Schülerinnen und Schüler</p> <p>(19) unterscheiden diskrete und stetige Zufallsgrößen und deuten die Verteilungsfunktion als Integralfunktion            (20) untersuchen stochastische Situationen, die zu annähernd normalverteilten Zufallsgrößen führen,            (21) beschreiben den Einfluss der Parameter <math>\mu</math> und <math>\sigma</math> auf die Normalverteilung und die graphische Darstellung ihrer Dichtefunktion („Gauß’sche Glockenkurve“)</p>	 <p>prob 0.9522096  z-Wert unten <math>-7E+997</math>  z-Wert oben 1.6666667  <math>\sigma</math> <math>225^{0.5}</math>  <math>\mu</math> 125</p>  <p>in(x)=binomialPDF(x, 50, 0.4)  done  50*0.4⇒E  20  <math>\sqrt{50*0.4*0.6}</math>⇒sigma  <math>2\cdot\sqrt{3}</math>  define no(x)=<math>\frac{1}{\sqrt{2*\pi}}</math>e<sup><math>-\frac{x^2}{2}</math></sup>  done</p>  <table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>A</th> <th>B</th> <th>C</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>0</td><td>8.1E-12</td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td>1</td><td>2.7E-10</td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td>2</td><td>4.40E-9</td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td>3</td><td>4.69E-8</td><td></td></tr> <tr><td>5</td><td>4</td><td>3.68E-7</td><td></td></tr> <tr><td>6</td><td>5</td><td>2.26E-6</td><td></td></tr> <tr><td>7</td><td>6</td><td>1.13E-5</td><td></td></tr> <tr><td>8</td><td>7</td><td>4.73E-5</td><td></td></tr> <tr><td>9</td><td>8</td><td>1.69E-4</td><td></td></tr> </tbody> </table>		A	B	C	1	0	8.1E-12		2	1	2.7E-10		3	2	4.40E-9		4	3	4.69E-8		5	4	3.68E-7		6	5	2.26E-6		7	6	1.13E-5		8	7	4.73E-5		9	8	1.69E-4	
	A	B	C																																						
1	0	8.1E-12																																							
2	1	2.7E-10																																							
3	2	4.40E-9																																							
4	3	4.69E-8																																							
5	4	3.68E-7																																							
6	5	2.26E-6																																							
7	6	1.13E-5																																							
8	7	4.73E-5																																							
9	8	1.69E-4																																							

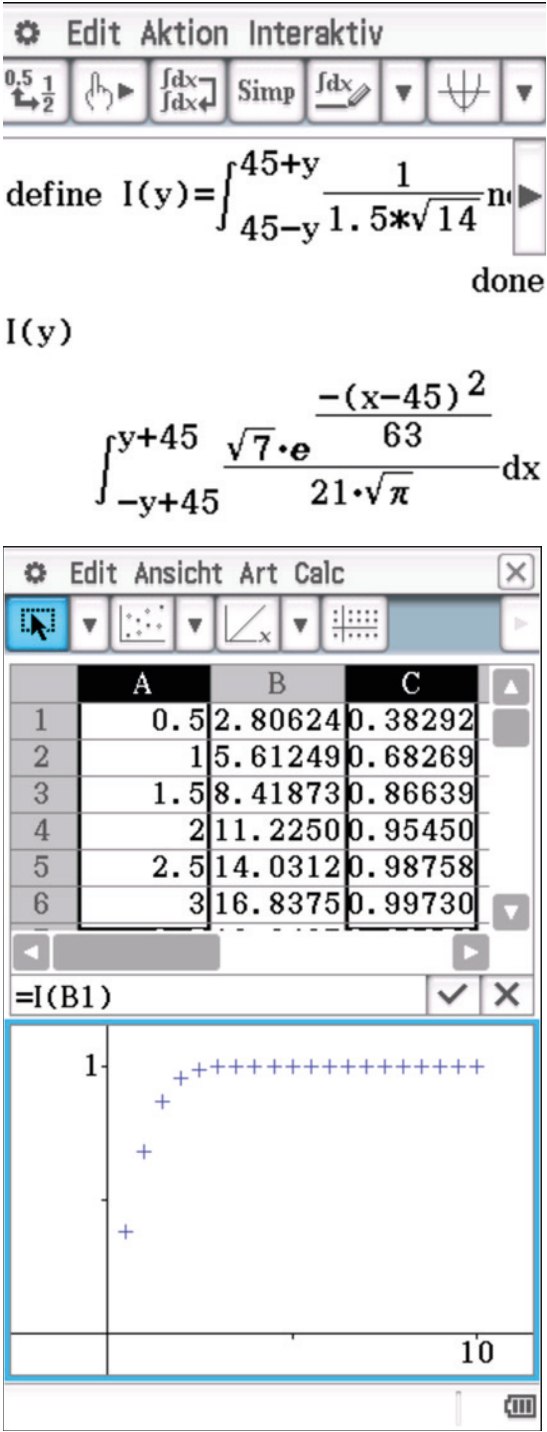
Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik						
<p>Man wählt das Statistik Menü:  <i>Calc -&gt; Verteilung -&gt; Normal -V summiert</i></p> <p>Unterer: <math>-\infty</math>  Oberer: 150  <math>\sigma : \sqrt{225}</math>  <math>\mu: 125</math></p> <p>Das Symbol <math>\infty</math> findet man auf der Tastatur <i>Math2</i></p> <p>Durch die Wahl von  lässt sich die „Gauß’sche Glockenkurve visualisieren</p> <p>Für die Darstellung in der Abbildung unten wurden zunächst im Bereich <i>main</i> einige Definitionen und Zuordnungen vorgenommen. (s. Abb. links)  Die erste Zeile ist nicht vollständig zu sehen. Sie lautet:  <i>Define pBin(x)=binomialPDF(x,50,0.4)</i></p> <p>In der Tabellenkalkulation werden die Werte der definierten Binomialverteilung berechnet.  A2: =A1+1  A2 markieren -&gt; <i>Edit -&gt; Füllen -&gt; Mit Wert füllen</i>  Formel: A1+1  Bereich: A2:A51  Die so erzeugten Daten sind in den Statistik Bereich zu übertragen.  Datei -&gt; Export</p> <table border="1" data-bbox="236 1630 715 1776"> <tr> <td>Variable</td> <td><input type="text" value="list1"/></td> </tr> <tr> <td>Typ</td> <td><input type="text" value="LISTE"/> ▼</td> </tr> <tr> <td>Bereich</td> <td><input type="text" value="A1:A51"/></td> </tr> </table> <p>Der Name für die Variablen muss dem Namen der ersten Liste im Statistik Bereich entsprechen.</p>	Variable	<input type="text" value="list1"/>	Typ	<input type="text" value="LISTE"/> ▼	Bereich	<input type="text" value="A1:A51"/>	<p>Für eine Altersgruppe gesunder Personen wird der systolische Blutdruck gemessen. Man geht von einer Normalverteilung aus mit <math>E(X)=125</math> und <math>\sigma = \sqrt{(225)}</math>  Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass für eine zufällig ausgewählte Person der Blutdruck größer als 150 ist?  <math>p(X \leq 150) \approx 0.952</math>  <math>\rightarrow p(X &gt; 150) \approx 1 - 0.952 = 0,048</math></p> <p>Der ClassPad rechnet die Werte für die Darstellung auf die Funktion um, so dass: <math>\mu=0</math> und <math>\sigma =1</math> gilt.</p> <p>Mit Unterstützung des ClassPad lässt sich der Zusammenhang zwischen der Binomial- und der Normalverteilung zeigen.</p> <p>Wir wählen dazu als Beispiel eine Binomialverteilung mit <math>n = 50</math> und <math>p = 0,4</math>  Als Erwartungswert gilt: <math>E = 20</math> und für die Standardabweichung ergibt sich: <math>\sigma = 2\sqrt{3}</math></p> <p>Die allgemeine Form der Gauß’schen Glockenkurve lautet:</p> $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} (*)$
Variable	<input type="text" value="list1"/>						
Typ	<input type="text" value="LISTE"/> ▼						
Bereich	<input type="text" value="A1:A51"/>						


Bezug zum Lehrplan	Screenshot																												
<p>Nur LK:</p> <p>Inhaltliche Schwerpunkte:</p> <p>Normalverteilung: Dichtefunktion („Gauß'sche Glockenkurve“), Parameter <math>\mu</math> und <math>\sigma</math>, Graph der Verteilungsfunktion</p> <p>nur LK:</p> <p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <p>(19) unterscheiden diskrete und stetige Zufallsgrößen und deuten die Verteilungsfunktion als Integralfunktion</p> <p>(20) untersuchen stochastische Situationen, die zu annähernd normalverteilten Zufallsgrößen führen,</p> <p>(21) beschreiben den Einfluss der Parameter <math>\mu</math> und <math>\sigma</math> auf die Normalverteilung und die graphische Darstellung ihrer Dichtefunktion („Gauß'sche Glockenkurve“)</p>	 <p>The top screenshot shows a TI-84 Plus calculator interface. At the top, the menu bar includes 'Zoom', 'Analyse', and 'Calc'. Below the menu bar is a table with three columns: 'list1', 'w', and 'list3'. The data in the table is as follows:</p> <table border="1" data-bbox="850 398 1310 593"> <thead> <tr> <th></th> <th>list1</th> <th>w</th> <th>list3</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td>8E-12</td> <td></td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>1</td> <td>3E-10</td> <td></td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>2</td> <td>4.4E-9</td> <td></td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>3</td> <td>4.7E-8</td> <td></td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>4</td> <td>3.7E-7</td> <td></td> </tr> <tr> <td>6</td> <td>5</td> <td>2.3E-6</td> <td></td> </tr> </tbody> </table> <p>Below the table, the calculator displays a histogram of the data. The x-axis ranges from 0 to 54, and the y-axis ranges from 0 to 0.1. The histogram shows a bell-shaped distribution centered around 25.</p>  <p>The bottom screenshot shows the same TI-84 Plus calculator interface. The histogram is now overlaid with a normal distribution curve. The curve is centered at 25 and has a peak height of approximately 0.1. The calculator interface shows the following functions defined in the 'Blatt1' tab:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><input checked="" type="checkbox"/> y21=no(x)</li> <li><input checked="" type="checkbox"/> y22=no(x-E)</li> <li><input checked="" type="checkbox"/> y23=<math>\frac{1}{\text{sigma}} \cdot \text{no}(x-E)</math></li> <li><input checked="" type="checkbox"/> y24=<math>\frac{1}{\text{sigma}} \cdot \text{no}\left(\frac{x-E}{\text{sigma}}\right)</math></li> <li><input type="checkbox"/> y25:□</li> </ul>		list1	w	list3	1	0	8E-12		2	1	3E-10		3	2	4.4E-9		4	3	4.7E-8		5	4	3.7E-7		6	5	2.3E-6	
	list1	w	list3																										
1	0	8E-12																											
2	1	3E-10																											
3	2	4.4E-9																											
4	3	4.7E-8																											
5	4	3.7E-7																											
6	5	2.3E-6																											

Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
<p>Für die Grafik sind zunächst Einstellungen erforderlich:  <i>Grafik einst -&gt; Einstellungen (s. unten)</i></p>  <p>-&gt; StatGraf1 anklicken</p> <p>Für die Grafik  wählen.  Folgende Einstellungen vornehmen</p>  <p>Durch die Wahl von  können die einzelnen Gauß'schen Funktionen eingegeben werden.  Durch nochmalige Betätigung von  werden die Grafen der Funktionen zusammen mit dem Histogramm dargestellt.</p>	<p>Damit die Anpassung gelingt, ist eine Verschiebung, so dass der x-Wert des Erwartungswertes mit dem der Binomialverteilung übereinstimmt, vorzunehmen. Des Weiteren sind noch Streckungen bzw. Stauchungen in x- und y-Richtung erforderlich.  Die Werte für <math>\mu</math> und <math>\sigma</math> lassen sich direkt aus den gegebenen Werten für die Binomialverteilung bestimmen.  Die Anpassung des Erwartungswertes in x-Richtung gelingt durch:  <math>x \rightarrow x - \mu</math>  Anpassung des y-Wertes für den Erwartungswert:</p> $no(x) \rightarrow \frac{1}{\sigma} no(x)$ <p>mit: <math>no(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}</math></p> <p>Streckung in x-Richtung:</p> $x - \mu \rightarrow \frac{x - \mu}{\sigma}$ <p>Die Anpassung gelingt umso besser, je größer n ist.  Aus dem Prozess wird deutlich, dass es möglich ist, zu einer Binomialverteilung eine passende Normalverteilung zu finden.  Der umgekehrte Vorgang ist nicht möglich, da es unmöglich ist, von den beiden gegebenen Größen <math>\mu</math> und <math>\sigma</math> auf die bestimmenden Größen n und p für die Binomialverteilung zu schließen.</p>



Bezug zum Lehrplan	Screenshot
<p>Nur LK:</p> <p>Inhaltliche Schwerpunkte: Normalverteilung: Dichtefunktion („Gauß’sche Glockenkurve“), Parameter <math>\mu</math> und <math>\sigma</math>, Graph der Verteilungsfunktion</p> <p>nur LK:</p> <p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <p>(19) unterscheiden diskrete und stetige Zufallsgrößen und deuten die Verteilungsfunktion als Integralfunktion</p> <p>(20) untersuchen stochastische Situationen, die zu annähernd normalverteilten Zufallsgrößen führen,</p> <p>(21) beschreiben den Einfluss der Parameter <math>\mu</math> und <math>\sigma</math> auf die Normalverteilung und die graphische Darstellung ihrer Dichtefunktion („Gauß’sche Glockenkurve“)</p>	<pre> binomialCdf(0, 40, 150, 0.3) 0.212607595 150*0.3 45 sqrt(150*0.3*0.7) 3*sqrt(14) 2 integrate(2/(3*sqrt(14))*no((x-45)/(1.5*sqrt(14))), 0, 40) 0.1864992418 binomialCdf(0, 400, 1500, 0.3) 2.428619757E-3 binomialCdf(0.2126, 1500, 0.3) 436 binomialCdf(0, 436, 1500, 0.3) 0.2239138638 sqrt(1500*0.3*0.7) 3*sqrt(35) integrate(1/(3*sqrt(35))*no((x-450)/(3*sqrt(35))), 0, 436) 0.2151113456 </pre>

Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
<p data-bbox="212 331 778 389"><i>Interaktiv -&gt; Verteilungsfunktionen -&gt; Diskret -&gt; binomialCdf</i></p> <div data-bbox="245 450 743 768">  </div> <p data-bbox="212 813 667 842">Die Funktion no wurde oben definiert.</p> <p data-bbox="212 1005 727 1128">Die Umkehrfunktion zur Binomialverteilung findet sich unter: <i>Interaktiv -&gt; Verteilungsfunktionen -&gt; Umkehrfkt. -&gt; invBinomialCdf</i></p>	<p data-bbox="807 331 1374 645">Wenn keine digitalen Werkzeuge zur Verfügung stehen, haben die Schülerinnen und Schüler nur die Möglichkeit für Stichproben, deren Umfang größer als 100 ist, die Normalverteilung zu nutzen. Gleiches gilt für Wahrscheinlichkeiten und Umfänge, deren Werte nicht in Formelsammlungen zu finden sind; es sei denn, der Umfang ist hinreichend klein, so dass man händisch zu Ergebnissen kommt.</p> <p data-bbox="807 680 1326 936">Mit Benutzung des ClassPad bietet sich nun die Möglichkeit, Vergleiche hinsichtlich der Genauigkeit zwischen Binomial- und Normalverteilung zu diskutieren. Wir betrachten dazu das folgende Beispiel: <math>n = 150, p = 0,3</math> Gefragt ist <math>p(X \leq 40) = ?</math> Es folgt:</p> <p data-bbox="807 969 1023 999"><math>\mu = 45 \quad \sigma = 3/2 \sqrt{14}</math></p> <p data-bbox="807 1032 1038 1093">Binomialverteilung: <math>p(x \leq 40) \approx 0,2126</math></p> <p data-bbox="807 1126 1023 1187">Normalverteilung: <math>p(x \leq 40) \approx 0,1865</math></p> <p data-bbox="807 1220 1358 1379">Es ist zu erkennen, dass sich doch erhebliche Unterschiede (ca. 2,6%) ergeben und dass bezogen auf die Normalverteilung eigentlich nur die erste Stelle hinter dem Komma Sinn macht.</p> <p data-bbox="807 1413 1366 1861">Erhöht man den Umfang um den Faktor 10, so ist zwar der Erwartungswert proportional, die Wahrscheinlichkeiten bzw. entsprechenden Intervalle sind es aber nicht. Von daher bestimmen wir zunächst ein Intervall, das der obigen Wahrscheinlichkeit entspricht. Aus den Daten ist erkennbar, dass sich eine präzise Grenze nicht angeben lässt. Setzt man anstatt der 436 die 435 ein, so ergibt sich ein Wert von ca. 0,2073 Die Daten zeigen, dass die Werte von Binomial- und Normalverteilung näher beieinander liegen, aber es dennoch einen Unterschied von ca. 0,88% gibt.</p>

Bezug zum Lehrplan	Screenshot																												
<p>Nur LK:</p> <p>Inhaltliche Schwerpunkte: Normalverteilung: Dichtefunktion („Gauß’sche Glockenkurve“), Parameter <math>\mu</math> und <math>\sigma</math>, Graph der Verteilungsfunktion</p> <p>nur LK:</p> <p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <p>(19) unterscheiden diskrete und stetige Zufallsgrößen und deuten die Verteilungsfunktion als Integralfunktion</p> <p>(20) untersuchen stochastische Situationen, die zu annähernd normalverteilten Zufallsgrößen führen,</p> <p>(21) beschreiben den Einfluss der Parameter <math>\mu</math> und <math>\sigma</math> auf die Normalverteilung und die graphische Darstellung ihrer Dichtefunktion („Gauß’sche Glockenkurve“)</p>	 <p>The screenshot shows two windows from a CAS calculator. The top window, titled "Edit Aktion Interaktiv", contains the definition of a normal distribution function: <math display="block">\text{define } I(y) = \int_{45-y}^{45+y} \frac{1}{1.5 \cdot \sqrt{14}} e^{-\frac{(x-45)^2}{21 \cdot \sqrt{\pi}}} dx</math> The bottom window, titled "Edit Ansicht Art Calc", shows a table of values for the function and a corresponding graph. The table has three columns labeled A, B, and C, with values ranging from 0.5 to 3. The graph shows a bell-shaped curve with the x-axis ranging from 0 to 10 and the y-axis from 0 to 1.</p> <table border="1" data-bbox="831 999 1362 1263"> <thead> <tr> <th></th> <th>A</th> <th>B</th> <th>C</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>0.5</td> <td>2.80624</td> <td>0.38292</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>1</td> <td>5.61249</td> <td>0.68269</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>1.5</td> <td>8.41873</td> <td>0.86639</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>2</td> <td>11.2250</td> <td>0.95450</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>2.5</td> <td>14.0312</td> <td>0.98758</td> </tr> <tr> <td>6</td> <td>3</td> <td>16.8375</td> <td>0.99730</td> </tr> </tbody> </table>		A	B	C	1	0.5	2.80624	0.38292	2	1	5.61249	0.68269	3	1.5	8.41873	0.86639	4	2	11.2250	0.95450	5	2.5	14.0312	0.98758	6	3	16.8375	0.99730
	A	B	C																										
1	0.5	2.80624	0.38292																										
2	1	5.61249	0.68269																										
3	1.5	8.41873	0.86639																										
4	2	11.2250	0.95450																										
5	2.5	14.0312	0.98758																										
6	3	16.8375	0.99730																										

Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
<p>Auch hier kann man sich zunutze machen, dass auch die Tabellenkalkulation CAS-fähig ist. Zur besseren Darstellung wurde die definierte Funktion I(y) nochmals angegeben. Da no(x) schon oben definiert wurde, ergeben sich jetzt einige Umformungen. Man kann das I(y) natürlich auch direkt definieren, so wie es in der zweiten Zeile dargestellt ist.</p> <p>B1: =A1*1.5*√14  C1: =I(B1)  Das Bild entsteht durch die Markierung der Spalten A und C und </p>	<p>Wir bleiben bei dem obigen Beispiel (<math>n=150</math>, <math>p=0,3</math>) und bestimmen Wahrscheinlichkeiten für Intervalle der Art:  <math>[\mu - 0,5 \sigma; \mu + 0,5 \sigma], [\mu - \sigma; \mu + \sigma], \dots</math>  <math>[\mu - 10 \sigma; \mu + 10 \sigma]</math>  Es folgt entsprechend oben:  <math>\mu=45 \quad \sigma = 3/2 \sqrt{14}</math></p> <p>Auch hier zeigt sich eine große Ähnlichkeit zur Binomialverteilung.</p>

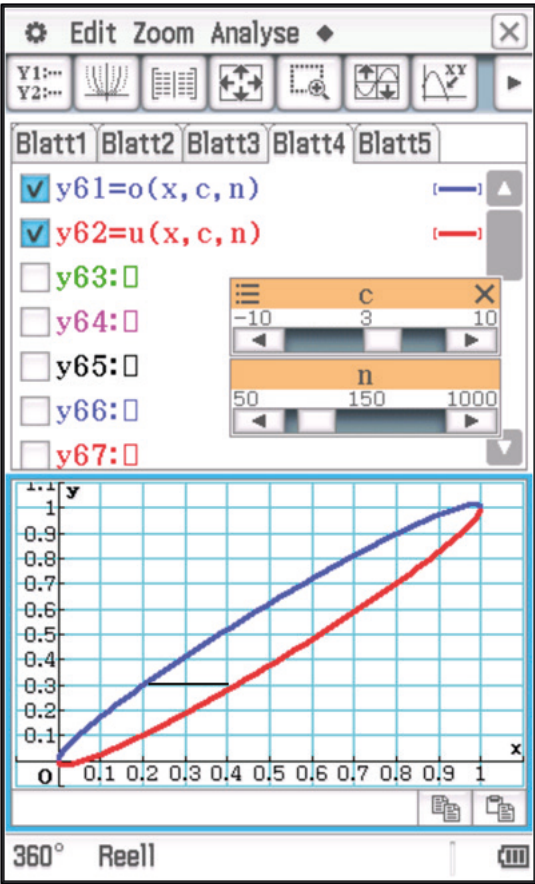
# Abschätzung einer unbekanntes Wahrscheinlichkeit



Bezug zum Lehrplan	Screenshot
<p>Nur LK:</p> <p>Inhaltliche Schwerpunkte:</p> <p>Normalverteilung: Dichtefunktion („Gauß’sche Glockenkurve“), Parameter <math>\mu</math> und <math>\sigma</math>, Graph der Verteilungsfunktion</p> <p>nur LK:</p> <p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <p>(19) unterscheiden diskrete und stetige Zufallsgrößen und deuten die Verteilungsfunktion als Integralfunktion</p> <p>(20) untersuchen stochastische Situationen, die zu annähernd normalverteilten Zufallsgrößen führen,</p> <p>(21) beschreiben den Einfluss der Parameter <math>\mu</math> und <math>\sigma</math> auf die Normalverteilung und die graphische Darstellung ihrer Dichtefunktion („Gauß’sche Glockenkurve“)</p> <p>(15) interpretieren die bei einer Stichprobe erhobene relative Häufigkeit als Schätzung einer zugrundeliegenden unbekanntes Wahrscheinlichkeit,</p> <p>(16) ermitteln mithilfe der <math>\sigma</math>-Regeln Prognoseintervalle für die absoluten und relativen Häufigkeiten in einer Stichprobe und interpretieren diese im Sachkontext,</p> <p>(17) ermitteln auf Grundlage einer relativen Häufigkeit ein Konfidenzintervall für den Parameter <math>p</math> einer binomialverteilten Zufallsgröße und interpretieren das Ergebnis im Sachkontext (Schluss von der Stichprobe auf die Grundgesamtheit),</p> <p>(18) schätzen den für ein Konfidenzintervall vorgegebener Länge erforderlichen Stichprobenumfang ab,</p>	$\sqrt{130 \cdot 0.9 \cdot 0.1} \Rightarrow \text{sig}$ $\frac{3 \cdot \sqrt{130}}{10}$ $\int_0^{120} \frac{1}{\text{sig}} \cdot \text{no}\left(\frac{x-117}{\text{sig}}\right) dx$ <p>0.8097724374</p> <p> normCDF(0, 120, 0.3 * sqrt(130), 117)</p> <p>0.8097724374</p> <p>invNormCDF("L", 0.95, sqrt(125 * sigma)) </p> <p>118.0170068</p> $\sqrt{112.5 \cdot 0.9 \cdot 0.1} \Rightarrow \text{sig}$ $\frac{9 \cdot \sqrt{2}}{4}$ $\int_0^{120} \frac{1}{\text{sig}} \cdot \text{no}\left(\frac{x-112.5}{\text{sig}}\right) dx$ <p>0.9907889373</p> <p>normCDF(-1, 1, 1, 0)</p> <p>0.6826894921</p> <p>normCDF(-2, 2, 1, 0)</p> <p>0.9544997361</p> <p>normCDF(-3, 3, 1, 0)</p> <p>0.9973002039</p> <p>-</p>

Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
<p>Alternativ zur direkten Eingabe der Gauß'schen Funktion kann man auch direkt:  <i>Interaktiv -&gt; Verteilungsfunktionen -&gt; fortlaufend -&gt; normCDF und untenstehende</i> Eintragungen vornehmen.</p> <p>           Unterer <input type="text" value="0"/>            Oberer <input type="text" value="120"/>  <math>\sigma</math> <input type="text" value="0.3\sqrt{130}"/>  <math>\mu</math> <input type="text" value="117"/> </p> <p><i>Interaktiv -&gt; Verteilungsfunktionen -&gt; Umkehrfkt. -&gt; invNormCDF</i>            Mit folgenden Eintragungen:</p> <p>           Lage Wkt. <input type="text" value="Links"/> <input type="text" value="Links"/>            prob <input type="text" value="0.95"/>  <math>\sigma</math> <input type="text" value="\sqrt{125*0.09}"/>  <math>\mu</math> <input type="text" value="112.5"/> </p> <p><i>Lage Wkt.</i> bezieht sich darauf, dass eine Grenze von <math>-\infty</math> ausgehend bis zu einem Wert gesucht wird. Alternativ kann man auch ein Intervall links und rechts vom Erwartungswert (<i>Mittelpunkt</i>) oder von <math>+\infty</math> nach links gehend (<i>Re.</i>) berechnen lassen.</p> <p>Wenn man im Bereich main <i>Interaktiv -&gt; Verteilungsfunktionen -&gt; Fortlaufend -&gt; NormCDF</i> wählt sind nur noch die beiden Grenzen einzugeben, da <math>\sigma = 1</math> und <math>\mu = 0</math> vorgegeben sind.</p>	<p>Es ist üblich, dass Airlines ihre Flugzeuge überbuchen, da in der Regel immer einige Kunden ihren Flug stornieren. Wir gehen von einer Stornierungsrate von ca. 10% aus. Ein Flugzeug einer Airline verfügt über 120 Sitzplätze. Für einen Flug nimmt die Airline 130 Buchungen entgegen.</p> <p>a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Plätze ausreichen?  <math>\mu = n \cdot p = 130 \cdot 0,9 = 117</math>            In ca. 19% der Fälle muss die Airline damit rechnen, dass die Plätze nicht ausreichen.</p> <p>b) Es soll abgeschätzt werden, wie viele Plätze tatsächlich benötigt werden und wie viele Plätze zur Verfügung stehen müssen, damit die Plätze mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 95% ausreichen, wenn 125 Buchungen vorliegen.  <math>\mu = n \cdot p = 125 \cdot 0,9 = 112,5</math>            Es wären dann im Mittel 118 Plätze erforderlich.            Aus den Werten ergibt sich, dass die Zahl 130 zu groß ist. Wenn man die 130 durch 125 ersetzt, ergibt sich eine Überlastung nur in ca. 1% der Fälle.</p> <p><b><math>\sigma</math> -Umgebungen des Erwartungswertes</b>            Es gilt:</p> $\begin{aligned} \mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma \\ \Leftrightarrow n \cdot p - \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} \leq X \\ \leq n \cdot p + \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} \end{aligned}$ <p>Es ergeben sich die entsprechenden Werte für die Normalverteilung. Für die Schülerinnen und Schüler mag es vielleicht erstaunlich sein, dass sich unabhängig von dem Erwartungswert und der Standardabweichung immer die gleichen Werte ergeben.</p>

Bezug zum Lehrplan	Screenshot
<p>Nur LK:</p> <p>Inhaltliche Schwerpunkte:</p> <p>Normalverteilung: Dichtefunktion („Gauß’sche Glockenkurve“), Parameter <math>\mu</math> und <math>\sigma</math>, Graph der Verteilungsfunktion</p> <p>nur LK:</p> <p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <p>(15) interpretieren die bei einer Stichprobe erhobene relative Häufigkeit als Schätzung einer zugrundeliegenden unbekanntem Wahrscheinlichkeit,</p> <p>(16) ermitteln mithilfe der <math>\sigma</math>-Regeln Prognoseintervalle für die absoluten und relativen Häufigkeiten in einer Stichprobe und interpretieren diese im Sachkontext,</p> <p>(17) ermitteln auf Grundlage einer relativen Häufigkeit ein Konfidenzintervall für den Parameter <math>p</math> einer binomialverteilten Zufallsgröße und interpretieren das Ergebnis im Sachkontext (Schluss von der Stichprobe auf die Grundgesamtheit),</p> <p>(18) schätzen den für ein Konfidenzintervall vorgegebener Länge erforderlichen Stichprobenumfang ab,</p> <p>(19) unterscheiden diskrete und stetige Zufallsgrößen und deuten die Verteilungsfunktion als Integralfunktion</p> <p>(20) untersuchen stochastische Situationen, die zu annähernd normalverteilten Zufallsgrößen führen,</p> <p>(21) beschreiben den Einfluss der Parameter <math>\mu</math> und <math>\sigma</math> auf die Normalverteilung und die graphische Darstellung ihrer Dichtefunktion („Gauß’sche Glockenkurve“)</p>	<p>The screenshot shows a sequence of mathematical operations in a CAS environment:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><math>\text{solve}\left((h-p)^2 = c^2 \cdot \frac{p(1-p)}{n}, p\right)</math></li> <li><math>\left\{ \frac{-p(-p+1)}{n} + (h-p)^2 = 0 \right\}</math></li> <li><math>\text{solve}\left(\left(1 + \frac{c^2}{n}\right) \cdot p^2 - \left(2 \cdot h + \frac{c^2}{n}\right) \cdot p + h^2 = 0, p\right)</math></li> <li>Two solutions for <math>p</math> are shown in large brackets: <ul style="list-style-type: none"> <li><math>p = \frac{-\left(\sqrt{-c^2 \cdot (n \cdot (4 \cdot h^2 - 4 \cdot h) - c^2)} - c^2 - 2 \cdot h \cdot n\right)}{2 \cdot (c^2 + n)}</math></li> <li><math>p = \frac{c^2 + \sqrt{-c^2 \cdot (n \cdot (4 \cdot h^2 - 4 \cdot h) - c^2)} + 2 \cdot h \cdot n}{2 \cdot (c^2 + n)}</math></li> </ul> </li> <li>Definition of <math>pu(c, n, h) = \frac{-\left(\sqrt{-c^2 \cdot (n \cdot (4 \cdot h^2 - 4 \cdot h) - c^2)} - c^2 - 2 \cdot h \cdot n\right)}{2 \cdot (c^2 + n)}</math></li> <li>Definition of <math>po(c, n, h) = \frac{c^2 + \sqrt{-c^2 \cdot (n \cdot (4 \cdot h^2 - 4 \cdot h) - c^2)} + 2 \cdot h \cdot n}{2 \cdot (c^2 + n)}</math></li> <li>Calculations: <ul style="list-style-type: none"> <li><math>pu(1, 1000, 0.31) = 0.2955705646</math></li> <li><math>po(1, 1000, 0.31) = 0.3248090558</math></li> <li><math>pu(1, 100000, 0.31) = 0.308539374</math></li> <li><math>po(1, 100000, 0.31) = 0.311464426</math></li> </ul> </li> </ul>


Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
<p>Wie die Abbildung links zeigt, ist die Gleichung (*) unten rechts nicht direkt vom ClassPad lösbar. Es sind also einige Umformungen erforderlich.</p> <p>Die Lösungen für p wurden in die rechte Spalte übertragen.</p> <p>Die beiden definierten Funktionen entsprechen den Gleichungen rechts unten.</p>	<p>Für eine Wahlprognose wurden n = 1000 Menschen befragt. Dabei stimmten 310 für die Partei ABC. Daraus ergibt sich die Frage, mit welchen Abweichungen bei der endgültigen Entscheidung zu rechnen ist. Man spricht in diesem Zusammenhang von Vertrauensintervallen.</p> <p>Es gilt:</p> $\mu - c \cdot \sigma \leq X \leq \mu + c \cdot \sigma$ <p style="text-align: center;">mit: c = 1,2,3</p> $\Rightarrow n \cdot p - c \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} \leq X$ $\leq n \cdot p + c \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$ $\Rightarrow p - c \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} \leq h_n \leq p + c \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}$ $\Rightarrow  h_n - p  \leq c \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}$ $\Rightarrow (h_n - p)^2 \leq c^2 \cdot \frac{p \cdot (1-p)}{n} \quad (*)$ $\Rightarrow h_n^2 - 2h_n \cdot p + p^2 = \frac{c^2}{n} p - \frac{c^2}{n} p^2$ $\Rightarrow \left(1 + \frac{c^2}{n}\right) p^2 - \left(2h_n + \frac{c^2}{n}\right) p + h_n^2 = 0$ <p>Als Lösungen ergeben sich:</p> $p = \frac{-\sqrt{-c^2(n(4h_n^2 - 4h_n) - c^2) - c^2 - 2h_n n}}{2(c^2 + n)}$ $p = \frac{\sqrt{-c^2(n(4h_n^2 - 4h_n) - c^2) - c^2 - 2h_n n}}{2(c^2 + n)}$ <p>Die beiden Lösungen für p sind die linke und die rechte Grenze für das Intervall, indem die Wahrscheinlichkeit p mit einer gewissen Sicherheit liegt.</p> <p>Bezogen auf das obige Beispiel liegen die möglichen Wahrscheinlichkeiten bei einer angenommenen Sicherheit von 1σ im Intervall [29,6%;32,5%]</p> <p>Wie die Berechnungen links zeigen, ist es erforderlich, um eine größere Genauigkeit zu erreichen, die Anzahl der Menschen, die befragt werden, erheblich zu steigern.</p>

Bezug zum Lehrplan	Screenshot
<p>Nur LK:</p> <p>Inhaltliche Schwerpunkte:</p> <p>Normalverteilung: Dichtefunktion („Gauß’sche Glockenkurve“), Parameter <math>\mu</math> und <math>\sigma</math>, Graph der Verteilungsfunktion</p> <p>nur LK:</p> <p>Die Schülerinnen und Schüler (15) interpretieren die bei einer Stichprobe erhobene relative Häufigkeit als Schätzung einer zugrundeliegenden unbekanntem Wahrscheinlichkeit,</p> <p>(16) ermitteln mithilfe der <math>\sigma</math>-Regeln Prognoseintervalle für die absoluten und relativen Häufigkeiten in einer Stichprobe und interpretieren diese im Sachkontext,</p> <p>(17) ermitteln auf Grundlage einer relativen Häufigkeit ein Konfidenzintervall für den Parameter <math>p</math> einer binomialverteilten Zufallsgröße und interpretieren das Ergebnis im Sachkontext (Schluss von der Stichprobe auf die Grundgesamtheit),</p> <p>(18) schätzen den für ein Konfidenzintervall vorgegebener Länge erforderlichen Stichprobenumfang ab,</p> <p>(19) unterscheiden diskrete und stetige Zufallsgrößen und deuten die Verteilungsfunktion als Integralfunktion</p> <p>(20) untersuchen stochastische Situationen, die zu annähernd normalverteilten Zufallsgrößen führen,</p> <p>(21) beschreiben den Einfluss der Parameter <math>\mu</math> und <math>\sigma</math> auf die Normalverteilung und die graphische Darstellung ihrer Dichtefunktion („Gauß’sche Glockenkurve“)</p>	<div style="text-align: center;"> <math display="block">\sqrt{\frac{0.31(1-0.31)}{1000}}</math> <p>0.01462532051</p> </div> <div style="margin-top: 10px;"> <math display="block">F_{\text{ne}}(p, c, n) = p - c \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}</math> <p style="text-align: right;">done</p> </div> <div style="margin-top: 10px;"> <math display="block">F_{\text{ine}}(p, c, n) = p + c \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}</math> <p style="text-align: right;">done</p> </div> <div style="margin-top: 20px;">  </div>

Hinweise zur Bedienung	Hinweise zum mathematischen Inhalt und zur Didaktik
<p>Für die untere und obere Begrenzung werden im Bereich <i>main</i> zwei Funktionen definiert, die von der relativen Häufigkeit <math>p</math>, dem Faktor <math>c</math> für die Standardabweichung und der Anzahl <math>n</math> abhängen.</p> <p>Für die grafische Darstellung wechselt man in der Bereich Grafik &amp; Tabelle und ersetzt das „<math>p</math>“ durch <math>x</math>. Wenn man nach dem Eintrag der Funktionen  wählt, werden die Schieberegler automatisch mit erzeugt.</p> <p>Durch die Wahl von  lassen sich Einstellungen für die Regler vornehmen. Dies ist vor allem für den zweiten für <math>n</math> erforderlich, da die Voreinstellung keinen Sinn macht. Sinnvoll ist zum Beispiel ein Bereich von 50 bis 1000 mit einer Schrittweite von 50.</p>	<p>Wie man oben gesehen hat, ist der Umgang mit der Gleichung (*) nicht ganz einfach. Die Gleichung lässt sich vereinfachen, wenn man auf der rechten Seite das <math>p</math> durch <math>h_n</math> ersetzt.</p> <p>Das heißt: <math> h_n - p  \leq c \cdot \sqrt{\frac{h_n \cdot (1 - h_n)}{n}}</math></p> <p>Als Intervall ergibt sich dann:</p> $[h_n - d; h_n + d] \text{ mit } d = c \cdot \sqrt{\frac{h_n \cdot (1 - h_n)}{n}}$ <p>Für <math>c=1</math> folgt: <math>d \approx 0,0146</math>  <math>\Rightarrow [0,2954; 0,3246]</math></p> <p>Vergleicht man die beiden Ergebnisse, so zeigt sich, dass zumindest für das obige Beispiel die Näherung absolut gerechtfertigt ist. Des Weiteren wird aus der Näherung das <math>\sqrt{n}</math> Gesetz deutlich.</p> <p>Die Sicherheitsintervalle lassen sich grafisch darstellen (s. Abb. links)  Schülerinnen und Schüler können so die Abhängigkeit dieser Intervalle von <math>c</math> und <math>n</math> erfahren.  Die Intervalle werden durch Strecken, die parallel zur <math>x</math>-Achse verlaufen und durch die beiden Funktionsgraphen begrenzt sind, dargestellt.  Eingezeichnet in die Abbildung links ist das Intervall für <math>p=0,3</math></p>

# Arbeitsblatt zur Stochastik


1. Für den Münzwurf machen wir folgende Zuordnung: Kopf: 2, Zahl: 1  
Es werden 2 Münzen geworfen und die zugeordneten Werte addiert.  
Führen Sie dazu eine Simulation mit dem ClassPad durch.

Wählen Sie dazu im Bereich *main*:  (im letzten Reiter) und tragen Sie für die Anzahl 100 und für die Anzahl der Flächen zwei ein, dadurch wirkt der Würfel wie der Wurf einer Münze. Interpretieren und begründen Sie das Ergebnis.

2. Simulieren Sie das Werfen von 3 Würfeln und bilden Sie die Augensumme. Führen Sie 100 Simulationen durch. Bestimmen Sie den theoretischen Erwartungswert und vergleichen Sie diesen mit dem der Simulation.

Hinweise: Benutzen Sie dazu die Tabellenkalkulation. Die benötigte Formel lautet: =rand(1,6). Für die Durchführung: *Edit* -> *Mit Wert füllen* und geben Sie jeweils die Bereiche an (zum Beispiel: A1:A100).

3. Bestimmen Sie den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung für die Abschlusstabelle der letzten Bundesliga Saison. Vergleichen Sie die Werte mit den theoretischen, wenn man davon ausgeht, dass  $\frac{1}{4}$  der Spiele unentschieden enden und alle Mannschaften als gleich stark vorausgesetzt werden.

4. Es soll im Folgenden ein Urnenmodell simuliert werden. Sie finden die Möglichkeit einer Simulation im Bereich *main*. Wählen Sie dazu . Sie finden das Symbol unter dem Reiter .

Wählen Sie „Urne“ mit 1000 Versuchen und ordnen Sie den Farben folgende Anzahlen zu:

A	B	C	D	E	F
1	2	3	4	5	6

Vergleichen Sie die Daten der Simulation mit den theoretischen Werten.  
Wir ordnen jetzt den Farben die folgenden Werte zu:

A	B	C	D	E	F
6	5	4	3	2	1

Es wird folgendes Spiel angeboten: Sie können auf eine Farbe setzen und erhalten bei einem Euro Einsatz 6 Euro als Gewinn, wenn A gezogen wird, 5 Euro für B usw. Ein Mitschüler behauptet, es ist dann vollkommen egal, auf welche Farbe man setzt. Was meinen Sie?

5. Gegeben ist das folgende Programm für den ClassPad:

Es soll eine Antwort darauf geben, wie oft man im Schnitt würfeln muss, um eine „6“ zu erhalten.

```


Edit Strg I/O Vers.
w6 N
For 1→n to 100
0→z
1→w
While (not(w=6))
rand(1,6)→w
if (not(w=6))
then
z+1→z
IfEnd
WhileEnd
n→list1[n]
z→list2[n]
print n
next
    
```

Zu dem „for“ am Anfang gehört das „next“ am Ende. Diese sogenannte for-Schleife sorgt dafür, dass die Simulation 100-mal ausgeführt wird. Die Variable z zählt, wie lange es dauert, bis eine „6“ gewürfelt wird. Begründen Sie dies mit der Struktur des Programms.

Die Variablen n und z werden in Listen gespeichert.

Wählen Sie in Ihrem ClassPad den Bereich Programm: *Edit -> Neue Datei -> Wählen Sie einen Namen* (max. 8 Zeichen).


Danach gelangen Sie automatisch in den Editor, wo Sie das Programm links eingeben können.

Sie verlassen den Editor mit . Bejahen Sie, dass die Änderungen gespeichert werden.

Lassen Sie das Programm laufen: 

Die Werte können mit *Datei -> Import -> Eingabe A1, list1 bzw. B1 list2* in die Tabellenkalkulation übertragen werden. Mit  $=\text{mean}(B1:B100)$  erhalten Sie den Durchschnittswert. Vergleichen Sie diesen mit dem theoretisch ermittelten Wert.

6. In einem Zufallsexperiment wird eine Münze 5-mal geworfen. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Köpfe an. Die gesuchte Anzahl ist binomialverteilt. Es sollen die simulierten Werte mit den theoretischen verglichen werden und ein Histogramm erstellt werden.

Die Simulation wird im Statistik Menü durchgeführt. Man benutzt dazu den *randBin* Befehl (Diesen findet man über die Tastatur im Katalog) und trägt diesen bei  *"randBi...* ein. Es sind drei Angaben zu machen. Die erste Zahl gibt die Anzahl der Würfe an, die zweite die Wahrscheinlichkeit für Kopf und die letzte Zahl bezeichnet die Anzahl der Durchführungen. Es sollen 500 Simulationen durchgeführt werden.



Um ein Histogramm zu erhalten, ist zunächst *Grafik einst -> Einstellung zu wählen* (s. Abb. links)

Das Histogramm erhält man mit 

Sinnvoll: H-start: 0.5 und H-schritt: 1

Die theoretischen Werte lassen sich direkt im Statistik Modul bestimmen. In die Spalte list1 müssen die Zahlen 0, 1, ... ,5 händisch eingetragen werden. Unter der Spalte list2 wird Cal markiert. Danach erfolgt der Eintrag unter:

*Cal= binomialPDf(list1,5,0.5)*

Für die Grafik ist wieder, Histogramm zu wählen und X-List: list1 und Häufigk: list2.  
Für den Ausdruck: mit: H-start: 0 und H-schritt: 1

7. Es ist üblich, dass Airlines ihre Flugzeuge überbuchen, da in der Regel immer einige Kunden ihren Flug stornieren. Wir gehen von einer Stornierungsrate von ca. 10% aus. Ein Flugzeug einer Airline verfügt über 120 Sitzplätze. Für einen Flug nimmt die Airline 130 Buchungen entgegen.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Plätze ausreichen?
- Es soll abgeschätzt werden, wie viele Plätze tatsächlich benötigt werden und wie viele Plätze zur Verfügung stehen müssen, damit die Plätze mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 95% ausreichen, wenn 125 Buchungen vorliegen.

8. Erstellen Sie ein Histogramm für die Binomialverteilung ( $n = 60, p = 0,3$ )  
Dazu sind die erforderlichen Daten zunächst im Bereich Tabellenkalkulation zu erzeugen. Mit Hilfe des Export-Befehls sind diese Daten dann in den Statistik Bereich zu übertragen. Wir wollen das Histogramm mit dem Grafen der Normalverteilung vergleichen.

Dazu lassen Sie zunächst den Standardgraphen zeichnen.  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

Passen Sie mit Hilfe von Verschiebungen, Streckungen und Stauchungen den Grafen der Normalverteilung an das Histogramm an.

9. Bei Wahlumfragen werden zwischen 1000 Personen (z.B. Allensbach) und 2500 Menschen (z.B. Forsa) befragt. Die Institute geben dazu an, dass die Fehlertoleranzen zum tatsächlichen Wert bei bis zu 3% liegen können.

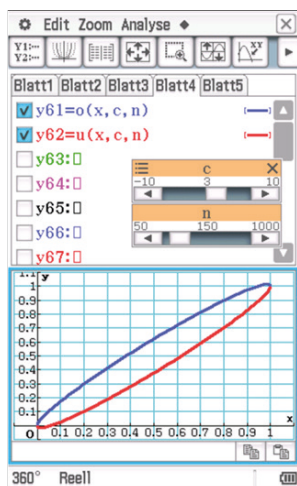
Widerlegen oder bestätigen Sie dies, indem Sie folgende Prognosen für die Bundestagswahl 2025 untersuchen. Legen Sie dabei Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95,4 % (= 2sigma-Umgebung) zugrunde.


- Forsa sagte am 11.3. für die CDU 28 % voraus, für die FDP 4 %.
- Allensbach meldete am 21.2. 32 % für die CDU und 4,5 % für die FDP.

10. Im Bereich main sind die beiden Funktionen:

$$u(p, c, n) = p - \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} \quad \text{und} \quad o(p, c, n) = p + \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}$$

definiert worden. Erstellen Sie die folgenden Funktionsgraphen und interpretieren Sie diese.



Die Schieberegler werden automatisch erzeugt, wenn Sie  betätigen.

Die Schieberegler lassen sich mit  anpassen.



125CPBUCH11-D

